UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

TEOREMAS EN EL AULA DE CLASE: UNA PROPUESTA PARA LA FORMULACIÓN DIDÁCTICA DE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS A NIVEL DE ESCUELA SECUNDARIA

Rubén Darío Lara Escobar

Universidad Nacional de Colombia

Sede Manizales

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Manizales, Colombia

Año 2013

TEOREMAS EN EL AULA DE CLASE: UNA PROPUESTA PARA LA FORMULACIÓN DIDÁCTICA DE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS A NIVEL DE ESCUELA SECUNDARIA

Rubén Darío Lara Escobar

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:

Magíster en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Director:

Matemático, Gonzalo Medina Arellano

Universidad Nacional de Colombia

Sede Manizales

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Manizales, Colombia

Año 2013

A mis padres, gracias por todo. Mi madre, quien me enseño todo lo que se debe hacer. Mi padre, quien me mostro lo que no se debe hacer.

La preocupación por el hombre y su destino siempre debe ser el interés primordial de todo esfuerzo técnico. Nunca olvides esto entre tus diagramas y ecuaciones.

Albert Einstein

Agradecimientos

Con profundo aprecio agradezco a todos los grandes maestros que de alguna forma han podido influir en mi formación profesional y humana, con mucho respeto intento devolver un poco de lo mucho que me han brindado, gracias a todos.

TEOREMAS EN EL AULA DE CLASE: UNA PROPUESTA PARA LA FORMULACIÓN DIDÁCTICA DE LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS A NIVEL DE ESCUELA SECUNDARIA

Autor: Rubén Darío Lara Escobar

Resumen

En este trabajo, se analiza si es posible introducir teoremas y demostraciones en el aula de clase en la educación media. Se busca identificar un enfoque para esto y, establecer cuál es la metodología más adecuada. Se intenta mostrar que el estudio de los teoremas y las demostraciones en la educación secundaria favorece el aprendizaje de las matemáticas; sin embargo, es preciso que se definan características para el abordaje de los teoremas en el aula. En efecto, se pretende construir una propuesta didáctica para el uso de las demostraciones como herramienta pedagógica, a partir de la conexión entre generalización, formalización y lógica, los cuales son los elementos centrales a toda demostración. Esto se realiza a través del estudio de varios ejemplos de demostraciones que, se espera constituyan una base para establecer los criterios fundamentales para usar una demostración como herramienta pedagógica.
Palabras claves: Teorema, Demostración, Generalización, Lógica, Formalización, Didáctica.

THEOREMS IN THE CLASSROOM: A PROPOSAL FOR THE DEVELOPMENT OF DIDACTICS OF MATHEMATICS TEACHING AT HIGH SCHOOL LEVEL

Abstract

In this paper, we examine whether it is possible to introduce theorems and proofs in the classroom in secondary education. It is an approach to identify and to establish what is the most appropriate methodology. It attempts to show that the study of the theorems and demonstrations in secondary education promotes learning of mathematics, however, it is necessary to define features for addressing the theorems in the classroom. Indeed, it aims to build a methodological approach to the use of demonstrations as an educational tool, from the connection between generalization, formalization and logic, which are the core elements to every proof. This is done through the study of several examples of proofs that, we expect to provide a basis for setting the basic criteria to use demonstration as a teaching tool.
Key words: Theorem, Proof, Generalization, Logic, Formalization, Didactics.

Contenido

Pág.

Justificación

El presente estudio desafía el enfoque tradicional de enseñanza de las matemáticas por medio de la repetición incesante, el cual no cubre las necesidades actuales de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, ya que se hace ineficaz para entender el papel de la argumentación en el ámbito de las matemáticas y de otras ciencias, en el sentido de la justificación de los procesos, y sobre todo el desarrollo de las habilidades necesarias para la comprensión de los conceptos, la construcción, producción y comunicación de los resultados y proposiciones en matemáticas.

Teniendo en cuenta que los actuales estándares básicos de educación en matemáticas están construidos a partir de tres elementos centrales al pensamiento matemático, los cuales son planteamiento y resolución de problemas, razonamiento matemático (formulación, argumentación, demostración), comunicación matemática y consolidación de la manera de pensar (coherente, clara, precisa), resulta pertinente el uso de la demostración y sobre todo la amplia gama de formas de razonamiento que provee ésta, para articular estos elementos en torno al sistema educativo en Colombia.

En efecto, el uso didáctico de la demostración, se ha explorado muy poco en la educación media, en tanto que los niveles de desarrollo del pensamiento matemático que sustenta la educación secundaria en su actual devenir no son coherentes con los fundamentos lógicos del desarrollo de los conceptos en matemáticas, lo cual se ve reflejado en el pobre desempeño matemático de nuestros estudiantes, en las pruebas nacionales e internacionales, que actualmente definen parte de lo que llamamos calidad de la educación en Colombia.

El problema central que se pretende atacar la identificación del potencial didáctico de la enseñanza de las demostraciones en matemáticas, esperando que pueda ayudar a mejorar procesos como la interpretación, diseño de conjeturas, inferencia, argumentación, explicación, generalización, aplicación, predicción, clasificación, búsqueda de patrones, de tal suerte que la enseñanza de las matemáticas adquiera un sentido práctico que facilite la comprensión de los conceptos en matemáticas.

Se espera además contribuir a crear ambientes de aprendizaje en matemáticas donde se incluyan pruebas, conjeturas y refutaciones en el aula de clase. A pesar de que muchos crean que éstas sólo hacen parte del quehacer matemático profesional, y que el rol de las demostraciones es solo el de hacer evidente un teorema o proposición, es claro que el estudio de las demostraciones puede aportar al desarrollo del pensamiento lógico y la creación y descubrimiento de nuevos conceptos en los estudiantes.

Introducción

La comprensión de las demostraciones en matemáticas es claramente una de las habilidades esenciales en el desarrollo del aprendizaje; sin embargo durante las últimas décadas, las reformas educativas las han marginado de los currículos en matemáticas a nivel elemental, medio y secundario.

El objetivo de esta marginalización, o más bien el pretexto para esta política con respecto a la inclusión de teoremas y sobre todo sus respectivas demostraciones, era que el esquema de aprendizaje de los estudiantes debía apuntar hacia un enfoque práctico, aduciendo que las demostraciones tienen, por un lado, únicamente un valor teórico para los matemáticos profesionales y, por otro lado, que las demostraciones son en extremo complicadas y que por lo tanto se convertían en obstáculos para el aprendizaje de los conceptos matemáticos fundamentales.

En este sentido, a pesar de reconocer la necesidad de incentivar las habilidades para la argumentación y el pensamiento lógico-matemático, es claro que el enfoque de la enseñanza por competencias en la educación Colombiana no sustenta el uso de las demostraciones como forma de aprendizaje práctico, en tanto solo reconoce dos visiones de la formación matemática, así lo expresa el ministerio de educación nacional:

“En el conocimiento matemático también se han distinguido dos tipos básicos: el conocimiento conceptual y el conocimiento procedimental. El primero está más cercano a la reflexión y se caracteriza por ser un conocimiento teórico, producido por la actividad cognitiva, muy rico en relaciones entre sus componentes y con otros conocimientos; tiene un carácter declarativo y se asocia con el *saber qué* y el *saber por qué*. Por su parte, el procedimental está más cercano a la acción y se relaciona con las técnicas y las estrategias para representar conceptos y para transformar dichas representaciones; con las habilidades y destrezas para elaborar, comparar y ejercitar algoritmos y para argumentar convincentemente”. (Estándares Básicos de Competencias, MEN 1998, Pág. 50)

Es claro que la visión práctica del uso de las matemáticas prevalece en el sistema de competencias, no obstante, ello no significa que la demostración no pueda verse desde el punto de vista de la práctica en la enseñanza de las matemáticas, a nivel elemental, básico o secundario.

Sin embargo, el sistema educativo Colombiano al introducir la evaluación estandarizada de las competencias en matemáticas, como las pruebas SABER 11, no evalúa el razonamiento lógico-matemático en su aspecto de generalización, de abstracción y menos aún de formalización; los estándares nos dicen “Es pues necesario dejar claro que el pensamiento lógico no es parte del pensamiento matemático, sino que el pensamiento lógico apoya y perfecciona el pensamiento matemático, y con éste –en cualquiera de sus tipos– se puede y se debe desarrollar también el pensamiento lógico” (Estándares, 1998, Pág.56).

Es un poco difusa la noción de pensamiento lógico que presentan los estándares, sin embargo es claro que en los currículos de matemáticas en los niveles básicos las demostraciones, la axiomatización, el uso de definiciones y en general el lenguaje de las matemáticas es utilizado de forma pragmática en la enseñanza secundaria.

En este contexto surge la idea de diseñar una propuesta para aprovechar el aporte de los teoremas y sus demostraciones como herramientas pedagógicas en el aula de clase, considerando que la comprensión real de los conceptos matemáticos no se da solo por la práctica y uso repetitivo de las operaciones y algoritmos; de hecho, la hipótesis implícita en esta propuesta radica en mostrar que el aprendizaje de los conceptos matemáticos se completa a partir del reconocimiento y asimilación de la noción abstracta, formal y generalizada de dichos conceptos y, que la aplicación de estos a la tecnología y, a otras ciencias, en general puede mejorarse significativamente.

El análisis del uso de las demostraciones y teoremas en el nivel básico y secundario, en la educación matemática se puede abordar desde varias perspectivas; es clave diferenciar la visión del docente y la del estudiante, siempre mirando las interconexiones entre estas. Se debe tener en cuenta además, que la demostración es vista como herramienta para la comprensión de las ideas matemáticas más profundas.

Desde el punto de vista docente se debe tener claro cuál es el nivel de los estudiantes, la claridad y organización de la exposición y comunicación de las ideas, la introducción y el desarrollo de nuevos conceptos, las diferencias entre las posibilidades lógicas para enfrentar la coherencia interna de las demostraciones, es decir si la demostración es deductiva, inductiva, indirecta, etc.

El estudiante debe adquirir la habilidad para diferenciar los tipos de argumentación en matemáticas; la sofisticación en la construcción de los argumentos aún no es necesaria, pero sí lo es la efectividad, en el sentido que sea capaz de validar la afirmación o el teorema, debe reconocer la demostración como fundamento de la creación y validación del pensamiento matemático y, algo fundamental, entender porqué una vez se demuestra un teorema de forma general, no se necesita probar un caso particular de éste.

Esta propuesta es pertinente en tanto busca hacer de la argumentación y la justificación de las proposiciones, parte esencial del aprendizaje de las matemáticas, superando las limitaciones del uso de las demostraciones para la asimilación de conceptos matemáticos, la formación de habilidades para el pensamiento crítico y el uso de estas en otras áreas del conocimiento.

Objetivos

A. Objetivo General

Diseñar una propuesta didáctica para el uso de los teoremas y sus demostraciones como herramienta pedagógica para el aprendizaje de las matemáticas en los estudiantes de secundaria.

B. Objetivos Específicos

- Identificar las posibilidades didácticas de algunos métodos de demostración para la enseñanza de conceptos y teoremas en la educación matemática a nivel secundario.
- Reconocer cuáles son las habilidades necesarias para la enseñanza y el aprendizaje de los teoremas y sus demostraciones en la educación secundaria.
- Analizar el papel de los teoremas y demostraciones en el aprendizaje de nuevos conceptos en matemáticas a nivel de la educación secundaria.

Marco Teórico

En Colombia actualmente existen pocas investigaciones en torno al uso de las de los teoremas y sus demostraciones como herramienta pedagógica en el nivel primario básico y secundario. A nivel mundial se reconoce la necesidad de que los estudiantes adquieran las habilidades básicas para construir argumentos válidos frente a una proposición matemática, usando una gran variedad de razonamientos y técnicas de demostración.

Este enfoque requiere que los docentes adquieran un conocimiento matemático, de carácter didáctico para la enseñanza de las demostraciones; esto demanda observar que el proceso de enseñar-aprender una demostración tiene un contenido histórico epistemológico implícito, “creemos que las dimensiones históricas y epistemológicas deben ser tratadas por autores que ven los resultados de investigaciones producidas en la historia y epistemología de las matemáticas teniendo en cuenta temas cruciales relacionados con las opciones educativas” (Boero, 2007, Pág. 20) reconociendo en la propuesta actual la inclusión de las perspectivas histórico-epistemológicas en la enseñanza de las demostraciones, “Invitamos a los filósofos e historiadores a reflexionar sobre cuáles dimensiones de la explicación y de la demostración en matemáticas podrían ser relevantes para la cultura general y los adultos educados, y se les pregunta a estudiosos de la didáctica que respondan a los aspectos metodológicos y epistemológicos de sus ideas" (Hanna et al. 2010, Pág. 2)

De esta forma, esta propuesta se enmarca en un enfoque histórico epistemológico, se analiza la perspectiva que aun sigue siendo punto de referencia en la filosofía de las matemáticas, la concepción de I. Lakatos (1978a), al tratar las matemáticas como una ciencia "casi empírica", derivando en una propuesta epistemológica para la enseñanza de las matemáticas. Por otro lado, una posible línea de investigación que ha adquirido importancia debido a sus aplicaciones a la enseñanza a partir de medios virtuales; aunque no se trate a profundidad en la propuesta, de forma implícita se hace uso de diagramas y representaciones mediante la concepción del pensamiento diagramático de C.S. Pierce, el cual "señala el hecho de que el pensamiento no puede ser explicado puramente por medios lógicos únicamente, sino que además depende de los sistemas de símbolos y representaciones utilizadas" (Hanna et al. 2010, Pág. 3).

Lakatos comparte con Khun, y otros filósofos de la ciencia, la idea de que el desarrollo del pensamiento científico, no solo se desenvuelve de acuerdo al carácter lógico de los descubrimientos científicos, sino que influyen otros elementos histórico-epistemológicos, como las preguntas y problemas de investigación en determinadas épocas.

De acuerdo a esto, Lakatos (1978a) considera que en general, la manera cómo evoluciona una teoría, se da en torno a una problemática que enfrenta la teoría, a diferencia de Khun, no con un contraejemplo o nuevo paradigma que refute dicha teoría.

Según Lakatos lo que ocurre es que no existe una "teoría" sino más bien, *un programa de investigación*, el cual contiene un núcleo firme, en el centro, donde se hallan los supuestos y las hipótesis fundamentales del programa. A partir de allí se abre un “cinturón” de hipótesis auxiliares que son las que hacen frente a la crítica recibiendo y soportando los contraejemplos y refutaciones, de tal forma que el programa se mantenga en pie a pesar de que estas hipótesis auxiliares se refuten.

Este trabajo es realizado por los científicos que hacen parte del programa de investigación; de acuerdo a esto, en matemáticas sucede algo similar, este arduo trabajo es el punto clave para que Lakatos considere que las matemáticas adquieren una dimensión casi-empírica, no en el sentido del empirismo, que se basa en los aspectos sensoriales de la experiencia, sino en el sentido del carácter del experimento mental que sustenta la falsación o verificación de una teoría en matemáticas.

Es necesario reconocer que la teoría de Lakatos, no es infalible, es decir, ha tenido serias críticas, y estas se basan fundamentalmente en el hecho de que en el texto de Lakatos (1976) *Proof and Refutations,* se sugiere un método en el cual los ejemplos encajan perfectamente en la idea de la *heurística* y se acomodan a la metodología propuesta por Lakatos; sin embargo, de acuerdo a recientes investigaciones, no todos los avances en matemáticas se dan de acuerdo al método de Lakatos, y mucho menos siguen el mismo patrón en términos epistemológicos.

El método de Lakatos se presenta en esta propuesta como una forma de acercarse a la didáctica de la demostración y su validez en el ámbito de las matemáticas en general, se discute solo con el objeto de dejar claro que su uso dentro de esta propuesta es de carácter pedagógico, debido en especial a que el método de Lakatos se centra en la noción de prueba, con la intención de seguir la línea de una heurística general, la cual se convierte en una guía para el descubrimiento en matemáticas. El método de Lakatos sugiere que las pruebas no solo justifican y convencen de la veracidad de una demostración, sino que explican las propiedades del concepto que se estudia en la demostración, de esta forma es que hace uso esta propuesta del método de Lakatos.

En este marco, se pretende identificar, a través de varios ejemplos prácticos los elementos centrales que permitan caracterizar la didáctica de la demostración y sus posibles usos en el aula de clases; esto se hace a partir de teoremas claves que muestren el carácter didáctico de la demostración a partir de la búsqueda de un enfoque pedagógico que tenga en cuenta los rasgos orgánicos de una demostración en torno al sistema axiomático implícito en ella, a partir de la sistematización de las ideas. Se busca además la posibilidad de construir nuevos resultados a partir del estudio de una demostración, y establecer criterios efectivos para la trasmisión y comunicación de las ideas en matemáticas.

Se debe aclarar que la propuesta pretende impactar la enseñanza de las matemáticas a nivel secundario, por lo cual se hace una distinción esencial entre la enseñanza a nivel superior y a nivel secundario. A nivel superior, el docente usualmente presenta los conceptos y nociones ya formalizadas, mientras que a nivel secundario se debe permitir al estudiante trabajar con los conceptos de manera que los (re) descubra por sí mismo, antes de su formalización.

Un ejemplo podría darse al estudiar la noción de convergencia: cómo hacer accesible al estudiante la noción de convergencia, en el sentido riguroso, en la cual se pueda construir la definición de ε-∂ de forma natural. Desde esta perspectiva es claro que el desarrollo del concepto necesita del conocimiento del desarrollo histórico del concepto de convergencia para definir cómo abordar el problema.

Es clave mencionar además que el estudio requiere del análisis de la naturaleza de la demostración en matemáticas, para poder definir el problema central de este trabajo, además cuál es papel que juegan las demostraciones y los teoremas en las matemáticas, reconociendo el valor de la propuesta epistemológica en la cual se enmarca dicha estructura de la demostración, para poder definir un conjunto de características que puedan consolidar una propuesta didáctica para su enseñanza, la cual puede ser aprehendida por el docente.

Para identificar las características esenciales que permiten aprender y enseñar una demostración a nivel de escuela secundaria, se necesita observar las actitudes frente a los retos de construir demostraciones planteadas a los estudiantes; sin embargo, este no es el objetivo de esta propuesta por razones de tiempo y acceso a los estudiantes; a pesar de ello, la propuesta didáctica que se intenta construir se toma elementos teóricos de las ideas de C.S. Pierce, en las que se reconoce la importancia que los estudiantes tengan claro el significado de los símbolos y la notación utilizada en las ecuaciones y diagramas, es decir del lenguaje de las matemáticas; además de las formas en las cuales estos están relacionados y cómo adquieren diferentes significados en contextos particulares.

En general la idea de Pierce, ayuda a comprender como actúan las formas simbólicas que le permiten al estudiante representar el contenido conceptual y la estructura de las relaciones que expresa por ejemplo un fenómeno particular que es modelado a partir de las matemáticas. En efecto, de acuerdo a M. Hoch y T. Dreyfus (Hoch y Dreyfus, 2004) los estudiantes adoptan dos perspectivas, la procesal y la objetiva, al enfrentarse al uso de los símbolos en las ecuaciones; la perspectiva procesal implica que el estudiante hace una lectura superficial y solo se concentra en reemplazar los valores en una ecuación. La perspectiva objetiva en cambio toma la ecuación como un objeto, una entidad, es decir un todo, que contiene una combinación de relaciones y estructuras que permiten establecer cuál es el desarrollo a seguir desde el punto de vista algebraico.

Un ejemplo propuesto por Hoch y Dreyfus consiste en observar como los estudiantes simplifican la expresion $1-\frac{1}{n+2}-\left(1-\frac{1}{n+2}\right)$ (Hoch y Dreyfus, 2004; Pág. 49); algunos estudiantes resuelven el problema tomando denominador común, desapareciendo el paréntesis y luego agrupando términos semejantes, dado que han sido entrenados para ello; es claro que estos estudiantes adoptan una perspectiva procesal. No es difícil identificar al estudiante que toma la perspectiva objetiva, dado que este reconoce que la expresión es una estructura, la cual contiene dos sub-estructuras; una que está incluida dentro de un paréntesis, y la otra por fuera, conectadas por un signo negativo, es evidente además, que las dos sub-estructuras son iguales. Separadas por un signo menos, indica claramente que la expresión simplificada es igual a cero.

Es clave entonces desarrollar en los estudiantes la capacidad para interpretar las relaciones entre las estructuras y subestructuras algebraicas, dentro de un todo, y a partir de esto identificar las posibles manipulaciones algebraicas requeridas para hallar la solución al problema.

De esta forma la idea de Pierce del pensamiento diagramático, considera una demostración como la construcción de un ícono o diagrama; cuyas relaciones corresponde a las relaciones de similaridad estructural existentes entre los símbolos y los objetos que estos representan; se llega a la conclusión mediante una secuencia de operaciones sobre estos símbolos. En general la idea de Pierce se usa de forma implícita en la propuesta que se construye; sin embargo es importante reconocer que puede ser de utilidad para seguir otras líneas de investigación en el análisis de la demostración, sobre todo desde la semiótica.

El otro punto de partida para construir la propuesta lo constituye el método del descubrimiento en matemáticas, sugerido por Lakatos (1976) el cual se consta de cuatro etapas, el primer paso consiste en lo que este denomina la conjetura primitiva, el segundo paso es la demostración, la cual según Lakatos, "se caracteriza como un experimento mental o argumento que descompone la conjetura primitiva en sub-conjeturas o lemas" (Lakatos, 1976. Pág. 127). El tercer paso lo denomina "la aparición de los contraejemplos globales", los cuales son globales en el sentido de que se aplican a la conjetura primitiva, sin tener en cuenta la división de esta en sub-conjeturas. El cuarto paso está definido por el análisis de la demostración, con el objeto de hallar el *lema oculto* en la demostración, o las suposiciones implícitas, para la cual se muestra que el contraejemplo es solo local, es decir solo aplica para casos particulares y la prueba funciona en general, el resultado de este proceso es un concepto nuevo generado a partir de la demostración.

El método consiste en iniciar con una conjetura, a menudo llamada conjetura primitiva, luego de esto se pone a prueba la conjetura a través de la búsqueda de ejemplos y contraejemplos que soporten o refuten la conjetura inicial; estos ejemplos o contraejemplos luego se examinan con el ánimo de reformular la conjetura inicial, con el objeto de una nueva búsqueda para lograr una argumento más profundo que dé como resultado la demostración o refutación del teorema o proposición que se ha presentado en forma de conjetura.

El contexto de Lakatos es de justificación, en tanto a través de rastrear las ideas ya sea en forma de ensayo y error o a partir de la historia del concepto, se logra familiarizar al estudiante con la experiencia de los conceptos en juego, al construir argumentos matemáticos para justificar la existencia de dichos conceptos.

Es importante recordar que al avanzar en los grados, los estudiantes deberían realizar conjeturas y explicaciones más sofisticadas, desde el punto de vista de los métodos de razonamiento. Este aspecto lo trata Lakatos (1978a) a partir de los conceptos de *heurística negativa y positiva,* las cuales son especies de rutas de investigación sobre el programa científico, aunque en este caso se trata de conceptos, así el estudiante se enfrenta a una heurística negativa cuando reconoce ideas y argumentos que no llevan al objetivo de explicar o refutar una proposición.

De otro lado, la heurística positiva muestra elementos plausibles dentro de la búsqueda de argumentos y explicaciones para probar la conjetura inicial, esto permite, al integrar estas dos ideas del método de Lakatos, buscar un contenido empírico para los argumentos de la demostración, teniendo en cuenta que este contenido se refiere a actividades como identificación de patrones, planteamiento de conjeturas, puesta a prueba de un ejemplo, construcción de argumentos a favor o en contra de una idea.

Es fundamental el hecho de que la propuesta de Lakatos tenga todos estos elementos. Es necesario que el docente no solo comprenda los conceptos fundamentales que aparecen en el ejercicio, sino que además debe saber comunicar por qué es importante entender el porqué una proposición es central al concepto que se está enseñando, conociendo diferentes formas de representación de estos, para hacerlos más comprensibles.

En este punto es clave que el docente sea capaz de realizar preguntas en términos matemáticos, presentar problemas que sean productivos para el aprendizaje, en el sentido que estos problemas sean comprensibles, pero además, desde el punto de vista lógico matemático, estén bien fundamentados, y muestren al estudiante los principios o conceptos implícitos en la demostración, haciendo énfasis en el rol explicativo de la prueba.

Finalmente, como hemos comentado anteriormente, el método de Lakatos se sugiere en esta propuesta, con el objeto de permitirle al estudiante la investigación sobre los conceptos e ideas en matemáticas, recorriendo la lógica del descubrimiento (Lakatos, 1976), que no es una lógica en el sentido formal, sino una heurística general para estudiar la aparición de algunos conceptos en matemáticas, que podemos resumir de la siguiente forma:

1. Se define una generalización del problema a partir del diseño de la conjetura primitiva.
2. Se presenta un bosquejo de argumentación o demostración informal de la conjetura (a menudo llamado por Lakatos experimento mental) y, de ser posible, se descompone la conjetura en diferentes lemas.

3. Se presentan los contraejemplos globales a la conjetura.
4. Se realiza el análisis de la demostración, buscando el lema oculto, que es responsable de la aparición de los contraejemplos, para incorporarlo a la conjetura.

Tomamos estos elementos como punto de partida para el desarrollo de la de la propuesta didáctica, que presentamos a continuación, adaptándolos de la siguiente forma:

1. Generalización, a través de la producción de las conjeturas.
2. Refutaciones y argumentaciones, mediante los actos mentales, inferencia, explicación, predicción, clasificación y búsqueda de patrones, solución de problemas.
3. El proceso de reinvención de los conceptos matemáticos en el aula, poniendo a prueba los ejemplos, la construcción de contraejemplos y análisis de la demostración a partir los esquemas formales deductivos, inductivos, directos.
4. Proveer de una explicación, justificación y construcción del significado de los objetos matemáticos estudiados, sus relaciones y propiedades fundamentales.

Con estos elementos vamos a desarrollar los problemas que nos permitirán acercarnos a la demostración como elemento didáctico para la enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria.

En segundo lugar, el esquema de pensamiento diagramático será de gran ayuda, aunque de forma implícita, en la medida que nos permitirá aislar de manera singular el proceso mental y práctico que se involucra en la enseñanza de los teoremas y demostraciones a nivel cognitivo y, en particular, la evolución histórica de los tipos de razonamiento usados en el desarrollo de las demostraciones, la función de la prueba como mecanismo didáctico en la comprensión de un concepto.

En el proceso de reinvención o construcción de conceptos matemáticos en el aula es necesario que los estudiantes reconozcan el lenguaje de las matemáticas, el significado de los símbolos, ecuaciones, diagramas, gráficos, que participan en la construcción de los significados relacionados con las ideas generales de los conceptos que se estudian a través de las demostraciones.

La importancia de hacer claridad sobre estos elementos radica en el hecho de que el formalismo simbólico de las matemáticas puede convertirse en un obstáculo para el aprendizaje, en tanto no se hace la diferencia entre quienes aprenden matemáticas como un medio, y quienes lo hacen como un fin en sí mismo, en tanto las formas de presentar, comunicar e interpretar los conceptos y relaciones matemáticas se ven afectadas por los símbolos que los expresan.

Un ejemplo de este problema se presenta en las expresiones algebraicas: la diferencia entre una variable y una constante, en términos simbólicos, es gigantesca, las constantes se representan generalmente por las primeras letras del abecedario a,b,c,d o por letras como j,k,l,m,n, y las variables se representan por medio de las últimas letras del abecedario, w,x,y,z. Sin embargo, en la práctica, el estudiante no hace diferencia porque no comprende la diferencia de símbolos y conceptos.

El concepto de variable y constante en los números reales $\mathbb{R}$, están asociados por ejemplo a los símbolos a, para las constantes, y puede tomar cualquier valor real, lo mismo que el de la variable x, que también puede tomar cualquier valor real.

Pero debe existir alguna diferencia, de lo contrario no serían conceptos diferentes; la diferencia radica en que las constantes permanecen fijas una vez han tomado cualquier valor real, mientras que las variables no; esta ligera diferencia conceptual, es enorme cuando se trata de la enseñanza de un concepto matemático.

El problema desde lo algebraico se hace aún mayor al llegar otras ciencias como la física, donde el significado de las variables y constantes en las ecuaciones toma otros aspectos en consideración. Pese a ello el estudiante generalmente interpreta superficialmente las ecuaciones y solo se fija en los cálculos de valores que toman las variables y constantes en las ecuaciones; es muy raro que el estudiante considere una ecuación como un objeto en su totalidad, constituido por una serie de relaciones y objetos para darle un sentido diferente al modelo algebraico de las relaciones físicas, permitiéndole reestructurar la representación algebraica realizando diferentes manipulaciones simbólicas para adaptar el modelo a la física y a otras ciencias.

Desde la perspectiva de Pierce, según Radford (2008), el objeto de la demostración matemática es la construcción de un ícono o diagrama, cuyas relaciones obedecen a las relaciones existentes en el objeto del pensamiento. Los íconos según peir Pierce se construyen de acuerdo a una serie de analogías con lo que designa el diagrama, se establece una semejanza estructural entre las relaciones y rasgos del diagrama y lo que expresan. De acuerdo a esto, “toda demostración resulta de una secuencia de acciones realizadas sobre los signos, de modo que es descrita mediante conceptos de la semiótica” (Legris, 2012, Pág. 127).

El proceso mental que requiere una demostración, no los actos mentales, sino la manera como se articulan estos en el razonamiento, es lo que se tiene en cuenta para el proceso demostrativo, que según Pierce es la construcción del diagrama. En esta propuesta ello implica el camino que recorre el razonamiento del estudiante para construir los argumentos y cómo influyen en este proceso los símbolos, signos y diagramas del lenguaje matemático involucrado. Finalmente se aclara que sobre este último aspecto hace falta mayor investigación en el país, en especial en el campo de la educación matemática.

1. La Idea de una Demostración

El objetivo de esta propuesta es presentar un análisis de las características necesarias para enseñar de manera didáctica una demostración en el aula de clase, a nivel secundario, de acuerdo a visión empírica, en el sentido de Lakatos.

Este problema se dirige mediante algunas preguntas, desde el punto de vista didáctico ¿qué significa enseñar un teorema o una demostración? ¿Una demostración explica, justifica o convence sobre la veracidad de una proposición? ¿Qué habilidades se necesitan para enseñar y aprender una demostración a nivel secundario? ¿Cómo es posible enseñar el proceso de construcción de una demostración?

La pregunta fundamental que orienta esta propuesta es ¿Cuáles son las características centrales que permiten la comprensión de un teorema (o proposición), su demostración y su proceso de construcción en estudiantes de secundaria?

El análisis de las demostraciones en la educación matemática tiene varias perspectivas. La visión del docente y la del estudiante se integran para entender la prueba como una herramienta para la comprensión de conceptos matemáticos.

Una demostración debe tener en cuenta varios elementos claves para su comprensión desde la mirada de quien la enseña: la audiencia, claridad en la exposición, la organización y estructura de las ideas, intervención de nuevos conceptos o conceptos subyacentes a las ideas generales de la demostración, y el esquema de la prueba, es decir si es deductiva, inductiva, por contradicción, directa, por casos, o construcción de un contraejemplo.

La prueba es formal en tanto expresa un tipo de razonamiento especifico, para validar el conocimiento matemático; en general se llama *deductiva* si se expresa mediante una secuencia finita de razonamientos que se derivan de axiomas, con base en una serie de reglas de inferencia establecidas de antemano. Uno de los tipos de demostración es la llamada prueba por *contradicción,* en la cual se construye una contradicción cuando se agrega la negación de la conclusión a las premisas originales.

La intención central es entonces desglosar de manera didáctica la estructura general del proceso de construcción de una demostración; para ello es clave que el docente logre que el estudiante comprenda *qué es* y *qué no es* una demostración. El desafío didáctico de la enseñanza y aprendizaje de una demostración requiere de una serie de actos mentales, de formas de pensar y de entender en los estudiantes, y de una serie de características que definen la naturaleza intrínseca de un teorema y su demostración.

Existen dos elementos que debemos tener en cuenta para analizar el aprendizaje de una demostración: uno es el proceso de *comprender* y el otro el de *realizar* una demostración. Desde la perspectiva de la comprensión, es preciso que el estudiante entienda el enunciado del teorema o proposición, los pasos y el razonamiento que sigue la demostración, que tenga claro un bosquejo de las ideas claves que forman el núcleo de la prueba. La comprensión implica entonces de acuerdo a Harel (Boero et al. 2007) actos mentales, “la noción de actos mentales, se refiere a actos como interpretación, realización de conjeturas, inferencias, pruebas, explicaciones, generalizaciones, aplicaciones, predicciones, clasificación, búsqueda y solución de problemas." (Hana, G. en Boero et al. Pag. 66). Son estos actos mentales, los que suscitan mejoras en cada estudiante para que puedan comprender la intrincada trama que se da alrededor de una demostración.

De otro lado, el trabajo de realizar una demostración requiere del conocimiento de las diferentes técnicas de demostración, de la profundidad de las relaciones lógicas, de los elementos que conforman el sistema axiomático donde se realiza la prueba; además, ser creativo a la hora de hallar las relaciones estructurales en la demostración; comprender con precisión la forma lógica denominada implicación; en nuestro caso es fundamental entender que esta forma lógica es la clave para hallar una pregunta lo suficientemente general que nos permita realizar una conjetura que sea nuestro punto de partida para el estudio de una posible demostración de dicho problema.

Un aspecto clave de la realización de una prueba se basa en el hecho de que las matemáticas modernas brindan un tratamiento diferente a la prueba; es necesario que los estudiantes que tienen como tarea desarrollar una prueba comprendan que la naturaleza de la prueba está basada en un enfoque hipotético deductivo, en el cual los estudiantes derivan consecuencias de las hipótesis definidas dentro del sistema axiomático; esto se aclara con el objeto de expresar que no basta conocer de forma mecánica los diferentes métodos de demostración para realizar una prueba.

El análisis de los elementos claves para la comprensión de una demostración sugiere además, una familiarización de los estudiantes con los diferentes formatos, esquemas o formas de desarrollar una demostración. En efecto, la mayoría de los estudiantes ha sucumbido frente a una gran cantidad de conceptos matemáticos, elementales o no, pero es probable que nunca haya sido expuesto a una demostración (en el sentido formal), por lo cual considero relevante discutir lo que en matemáticas se denomina una prueba o demostración formal, sus características y elementos claves.

Debo aclarar que esta propuesta se enfoca en el carácter didáctico del desarrollo y comprensión de las demostraciones a través del esquema de solución de problemas, de diseño de actividades que se articulen a los elementos que permiten adquirir habilidades para la argumentación y explicación de conceptos a través de la comprensión de las demostraciones, utilizando una adaptación del método seguido por Lakatos (1976) en *Proofs and Refutations.*

Uno de los aspectos claves en el desarrollo de las demostraciones en el quehacer del matemático profesional consiste en la generalización de los resultados, sin embargo, en el ámbito de la demostración en el aula, esto es contraproducente, dado que la generalización no se puede entregar a los estudiantes como un producto terminado, debe ser un proceso en el cual el estudiante construya la generalización. Aquí podemos resaltar el trabajo de Lakatos, dado que este le da un punto de partida *práctico*, es de esta forma en que nos permitimos en este trabajo apuntar hacia la idea de la metodología de Lakatos para asegurar que un resultado general como un teorema y alcance mediante su demostración la generalización.

De esta manera el análisis de la forma como surgen las teorías permite realizar una analogía en la didáctica de la enseñanza de las matemáticas; la idea es mostrar que a través del esquema de un núcleo central donde estaría el teorema y la construcción auxiliar de una serie de hipótesis que ayuden a fortalecer la idea en el estudiante de que la proposición es cierta, se puede llevar a cabo el proceso general que logra en el estudiante consolidar o refutar la idea de que dicha proposición es cierta.

Lakatos (1976) presenta una perspectiva en la cual se muestra en detalle que el proceso de generalización en la práctica de las matemáticas corresponde a una serie de pasos que conducen a dicha generalización, estos pasos se estudiarán más adelante, lo que se quiere resaltar es la intervención de Lakatos en el estudio de la prueba y sus implicaciones para la educación en matemáticas.

En general, el lenguaje de las pruebas es extraño para casi todo el mundo que no esté cerca del quehacer matemático. El discurso de lo político o religioso presenta una serie de argumentos pero en realidad no constituye una forma de discurso demostrativo o de prueba, dado que este tipo de discusiones se genera sobre todo a partir de la emoción. El rasgo típico de la demostración es que se desarrolla como un argumento de carácter racional, que carece de la “emoción” de los otros discursos.

En primer debemos dejar claro que el sentido de las palabras en matemáticas, como en cualquier otra área científica adquiere una serie de significados comunes para ciertos términos específicos utilizados en el lenguaje de forma convencional, que toma un significado especial en las matemáticas.

Dichos términos, separados del lenguaje coloquial, constituyen un aspecto central no solo de la comunicación de las ideas matemáticas, sino que además describen parte del esquema de pensamiento que utiliza el pensamiento matemático para lograr construir todo su cuerpo teórico. Inicialmente describiremos de forma breve algunos términos claves como definiciones, teoremas, proposiciones, lemas, corolario, demostraciones o pruebas, conjeturas, axiomas.

De acuerdo a Houston (2009), las *definiciones* explican el significado de una palabra en matemáticas, los *teoremas* constituyen los resultados más importantes en cuanto son verdaderos y adquieren su importancia en la teoría matemática como eje central. Las *proposiciones* también son resultados veraces que dentro de la estructura teórica del área de las matemáticas que se estudia no son tan importantes, no dejan de ser realmente interesantes en sus usos y aplicaciones; los *lemas* son enunciados verdaderos que resultan importantes a la hora de probar la veracidad de otros resultados más importantes. Un *corolario* es un resultado que es verdadero y resulta como consecuencia directa de la demostración de un teorema o una proposición. Una *demostración o prueba* en general, es la explicación del porqué una proposición o teorema es cierto. Una *conjetura* es un enunciado que se cree ser cierto, pero para el cual no existe hasta el momento una demostración de su veracidad o falsedad, y finalmente un *axioma* es un enunciado que se asume como cierto acerca de una situación matemática (Houston, 2009, pág. 99).

Pero ¿en qué consiste este carácter racional de la argumentación en matemáticas? En efecto, la diferencia radica en el uso de la lógica, la cual nos define cuáles son los *términos* en los que está *permitido* discutir, nos define las reglas o *axiomas* mediante las cuales podemos probar o demostrar que existen ciertos *hechos* o proposiciones que pueden ser *falsos* o *verdaderos*.

De esta manera es como el discurso racional de las matemáticas acciona, de forma muy rigurosa y sobre todo se basa en la idea de que este tipo de razonamientos se pueda reproducir en cualquier otro lugar o tiempo siempre y cuando mantenga las mismas condiciones, es decir axiomas y reglas de inferencia.

El uso de la demostración rigurosa en matemáticas data desde los tiempos de la antigua Grecia, con la corriente de los Pitagóricos, aunque aún existían rastros de argumentos de prueba mediante pocos ejemplos y dibujos de situaciones particulares.

La geometría Euclidiana, quizás el primer *sistema axiomático;* posee un formato riguroso y muy estructurado para la formulación de los teoremas y las demostraciones; es seguramente este sistema el que más influencia tiene en la historia de las matemáticas, incluso dándole forma al moderno sistema de análisis de la demostración en matemáticas. En definitiva, podemos afirmar que Euclides introduce el método axiomático, el cual se rige por un paradigma lógico, para el desarrollo de las pruebas rigurosas o *formales*.

Durante la primera mitad del siglo XX se desarrolló, básicamente a partir del grupo Bourbaki, y de David Hilbert, el concepto moderno de lo que es una prueba rigurosa en matemáticas. Vamos a presentar algunos de los métodos más comunes para la demostración en matemáticas.

En primer lugar debemos aclarar en qué consiste un sistema axiomático. A grandes rasgos los elementos constitutivos de un sistema axiomático son: los llamados *términos no definidos,* las *definiciones,* los *axiomas,* y las *reglas de inferencia.* Para que el sistema sea formal, requiere además, un conjunto de símbolos para construir las expresiones, para los conectivos lógicos, para las variables y constantes.

Los elementos no definidos son considerados los elementos básicos, dado que todos los demás términos se definen a partir de estos. Como su nombre lo indica, no poseen definición. Es común dar como ejemplo el *punto*, a la manera de Hilbert; el concepto de *conjunto* o de *elemento* en la teoría de conjuntos.

Las definiciones constituyen una expresión que enuncia con precisión, un concepto, nombrando una serie de elementos que diferencian el concepto; una definición no debe agregar cualidades al objeto definido, debe ser una simple abreviatura, aunque permite identificar propiedades importantes del concepto. Por ejemplo, supongamos que A y B son conjuntos, entonces podemos definir $A \times B$ como el conjunto de parejas ordenadas (a,b) tales que $a \in A$ y $b \in B$. Es evidente que para ello debe definirse primero el símbolo $\in$, que significa "pertenece a" y que es una "pareja ordenada"; la noción de pareja ordenada, se expresa como abreviatura para el conjunto $\{\{a\},\{a,b\}\}$. A partir de las definiciones se pueden seguir construyendo otros conceptos y relaciones en matemáticas.

Los axiomas, una vez se han establecido los elementos anteriores, son proposiciones que se toman por verdaderas sin necesidad de verificación previa. Los axiomas se establecen usando los términos no definidos y posiblemente las definiciones. Por ejemplo un axioma de la geometría Euclidiana, en este caso el primer postulado dice:

1. Dados dos puntos, se puede trazar una recta que pasa por dichos puntos.

Fig.1

A continuación se puede empezar a formular los teoremas. Un teorema, es una proposición que se deriva de los axiomas usando las reglas de la lógica. Usualmente basta con *Modus Ponendo Ponens* y *Modus Tollens,* aunque consideramos la primera como la regla fundamental para enunciar los teoremas:

modus ponendo ponens: si tenemos A y $A \Rightarrow B$, entonces tenemos B. Observemos que el símbolo $\Rightarrow$ es el equivalente a la palabra *implica.*

En resumen se puede ver como una implicación, en el sentido de que si se cumple la premisa A y sabemos que A *implica* B, entonces se cumple también B. Esta regla es esencial en cuanto a la demostración deductiva.

La otra regla que guarda relación con la anterior es el *modus tollens,* que viene a ser una forma de contra-reciproco del modus ponens: si tenemos B y además $\sim A \Rightarrow \sim B$ entonces se cumple A. Aunque solo hagamos referencia a estos dos aspectos de las inferencias existen varias estrategias de demostración, que se discuten con el ánimo de dar un sustento básico para la lectura y el desarrollo de los problemas que se plantean en el siguiente capítulo.

1.1 Demostración por Inducción

La inducción es una forma de razonamiento en matemáticas que posee una estructura bien definida:

Para cualquier número natural $n \in \mathbb{N}$ sea $P(n)$ una proposición. Si se cumple que:

1. $P(1)$ es verdadera;
2. $P(j) \Rightarrow P(j+1)$ para todo $j \in \mathbb{N}$

Entonces $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observemos el siguiente ejemplo:

Muestre que, si n es un entero positivo, entonces

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Demostración: Sea $P(n)$ la siguiente proposición

$$P(n): 1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Entonces $P(1)$ es la ecuación

$$1=\frac{1\cdot 2}{2}$$

Es evidente que esta ecuación es verdadera, por lo cual se cumple el primer paso del proceso de inducción.

En el segundo paso del método, se establece la hipótesis de inducción; es decir, asumimos que se cumple:

$$P(j):1+2+\cdots+j=\frac{j(j+1)}{2}\ ,$$

La sutileza del método esta en usar esta hipótesis para probar $P(j+1)$ la cual es:

$$P(j+1):1+2+\cdots+(j+1)=\frac{(j+1)(j+2)}{2}$$

Una forma sencilla de lograr esto, es tomando la expresión de $P(j)$ sumarle la cantidad $(j+1)$ en ambos lados, así:

$$\left[1+2+\cdots+j\right]+(j+1)=\frac{j(j+1)}{2}+(j+1)$$

La parte derecha de esta ecuación se puede simplificar de la siguiente forma:

$$\frac{j(j+1)}{2}+(j+1)=\frac{j^2+j+\left(2j+2\right)}{2}$$

$$\frac{j^2+3j+2}{2}=\frac{(j+1)(j+2)}{2}\ .$$

Esto prueba la proposición $P(j+1)$, con lo cual podemos concluir que la afirmación:

$$P(n):1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Se cumple para todo entero positivo. Lo cual completa la prueba.

Una forma interesante de ver cómo funciona el método inductivo, es tomando como ejemplo un problema propuesto por Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), el cual se conoce como *pigeonhole principle* (principio del palomar) que se puede expresar así:

Demuestre que si se ubican $n+1$ cartas en n buzones, entonces algún buzón debe contener al menos dos cartas.

Demostración: Sea $P(n)$ la proposición

$P(n)$: Si se ubican $n+1$ cartas en n buzones, entonces algún buzón debe contener al menos dos cartas.

De esta forma $P(1)$ es simplemente el hecho evidente de que si se colocan dos cartas en un buzón, entonces algún buzón contiene al menos dos cartas.

Ahora supongamos que $P(j)$ se cumple, y usamos esto para mostrar que se cumple también $P(j+1)$. Supongamos que se ubican $(j+2)$ cartas en $(j+1)$ buzones. Existen tres posibilidades:

1. Si el último buzón no contiene ninguna carta, entonces todas las demás cartas se ubican en los primeros j buzones. Ahora, como hay $(j+2)$ cartas, se puede aplicar la hipótesis de inducción, $P(j)$ y por tanto algún buzón debe tener al menos dos cartas (obsérvese que $j+2 > j+1$).
2. Si el último buzón contiene una sola carta, entonces $j+1$ cartas deben estar en los primeros j buzones, y aplicamos la hipótesis inductiva, por tanto algún buzón contiene al menos dos cartas.
3. Si el último buzón contiene dos cartas, está claro que no hay nada que mostrar, ya que encontramos al menos un buzón que contiene dos cartas.

Por tanto, hemos establecido que la proposición se cumple para $P(j+1)$.

Observemos que, en el paso inductivo hemos “destacado” el papel del último buzón en el argumento en el aplicamos la hipótesis de inducción; este mecanismo es en general simple, aunque a veces es un poco más difícil encontrar tal argumento. El principio al que se refiere la proposición se puede expresar de muchas formas y tiene muchas utilidades en varias ramas de la matemática.

1.2 Demostración por Contradicción

La estrategia de demostración por contradicción, también denominado demostración por reducción al absurdo, se basa en la ley lógica conocida como ley del tercero excluido, en el sentido de que una proposición es falsa o es verdadera. Teniendo esto en cuenta, podemos mostrar que una proposición es verdadera, excluyendo la posibilidad de su falsedad; asumimos entonces que es falsa y mostramos que esto implica una contradicción, dejando como única posible conclusión que la proposición es verdadera.

Un ejemplo clásico de este tipo de demostraciones se presenta al responder a la pregunta ¿existen infinitos números primos? En efecto, tratemos de probar por contradicción: el primer paso es negar la tesis de que existen infinitos números primos.

Demostración: Supongamos que existe un número finito de números primos digamos n. Por tanto podemos hacer una lista con todos así: $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$. Consideremos el número $q = p_1 p_2 p_3 ... p_n + 1$. Este número es primo o es compuesto. Si dividimos q por cualquiera de los primos que están en la lista, digamos p_i, entonces está claro que siempre obtendremos un residuo de 1 para cada $i = 1, 2, 3, ..., n$. Por lo tanto q no puede ser compuesto. Así concluimos que q es otro número primo, diferente a los de la lista, lo cual *contradice* el hecho de que todos los números primos están en la lista $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$. Y esto prueba que existen infinitos números primos.

Otro ejemplo de una prueba por contradicción se muestra a continuación.
Demuestre que si n es un entero positivo, entonces $n^2 + 3n + 2$ es un número par.

Demostración: Supongamos lo contrario; es decir, que n^2+3n+2 es impar para algún entero positivo n. Cualquier entero impar tiene la forma $2j+1$ donde j es un entero cualquiera. Por tanto tenemos que:

$$n^2+3n+2=2j+1$$

Reordenando los términos de esta última ecuación tenemos:

$$n^2+3n+2j=-1,$$

De donde

$$n(n+3)-2j=-1$$

Veamos ahora que si n es par, entonces $(n+3)$ es impar, y por otro lado, si n es impar, entonces $(n+3)$ es par, en cualquier caso $n(n+3)$ será el producto de un número par por un impar, y por lo tanto este producto es un número par. Así $n(n+3)=2k$ para algún entero k. De esto resulta lo siguiente:

$$2k-2j=-1$$

Por tanto tenemos:

$$2(k-j)=-1\text{, con } k-j \text{ entero.}$$

Esto último muestra que -1 es un número par, lo cual no es posible, de donde se puede concluir que la hipótesis inicial de que n^2+3n+2 es impar, es falsa, por lo tanto n^2+3n+2 es un número par.

1.3 Demostración Directa

La demostración directa es una forma establecer la verdad o falsedad de una proposición o teorema, mediante una combinación de definiciones, axiomas teoremas, que conduzca de las premisas iniciales a la conclusión deseada. La secuencia de pasos lógicos conduce a la conclusión sin necesidad de suposiciones auxiliares, tal como sucede en la demostración por inducción o por contradicción.

Un ejemplo muy simple nos muestra cómo funciona el método de demostración directo.

Demuestre que la suma de dos números enteros pares es par.

Demostración: consideremos dos enteros p y q que son pares, por tanto son de la forma $p = 2k$ y $q = 2j$ para algunos enteros k y j. La suma de estos es:

$$p + q = 2k + 2j$$

De donde tenemos que, $p + q = 2(k + j)$, con $k + j$ un número entero, por tanto se concluye que $p + q$ es múltiplo de 2, por lo cual es un número par.

Es importante ver que una proposición se puede demostrar de varias formas diferentes y que algunas veces una forma u otra ofrecen ventajas en simplicidad en los argumentos y los conceptos involucrados en la demostración. Tal como es el caso del ejemplo que vamos a analizar a continuación, que se demostró por inducción en el apartado anterior.

Demuestre que si n es un entero positivo, entonces n^2+3n+2 es un número par.
Demostración (directa): Sea $k=n^2+3n+2$, vemos que k se puede expresar de la siguiente forma: $k=n^2+3n+2=(n+1)(n+2)$ esto muestra que k es el producto de dos números enteros positivos consecutivos $(n+1)(n+2)$, por lo tanto uno de estos dos debe ser par, así k es múltiplo de dos, y por lo tanto es par.

Obsérvese en este ejemplo, la simplicidad de los argumentos donde solo se utilizaron las definiciones de un número par, el concepto de enteros consecutivos y la factorización.

En las pruebas directas a menudo se incluye una estrategia denominada demostración por casos o por exhaución, un ejemplo sencillo se muestra a continuación.

Pruebe que un número entero par, siempre se puede escribir como la suma de dos enteros impares.

Demostración: Consideremos el numero entero par $p=2k$ con $k\in\mathbb{Z}$. El primer caso se obtiene si k es impar; tenemos que $p=k+k=2k$, ya se ha expresado p como la suma de dos números impares. El segundo caso cuando se tiene lo contrario, k es par; podemos escribir $p=2k=(k-1)+(k+1)$. Como k es par, tanto $(k-1)$ como $(k+1)$ son ambos impares, de esta forma escribimos p como suma de números enteros impares.

Uno de los teoremas más importantes de las matemáticas es el conocido teorema de Pitágoras, para el cual existen muchas demostraciones, y desde la antigüedad hasta hoy sigue causando fascinación. Ofrecemos una demostración para ilustrar la idea de la prueba directa.

Teorema de Pitágoras. Demuestre que en un triangulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

Demostración: Consideremos la siguiente figura, observemos que muestra un cuadrado de lado c inscrito en un cuadrado de lado $a+b$. De otro lado, es claro por geometría elemental que el área del cuadrado mayor es $(a+b)^2$.

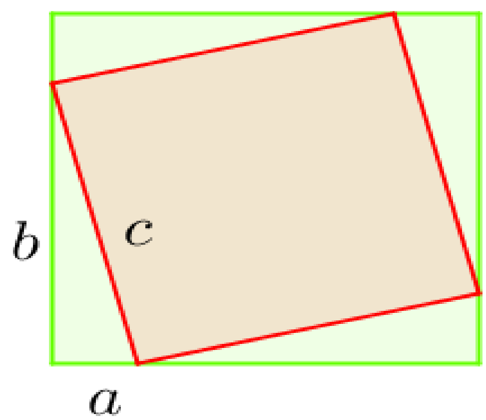


Fig.2

Además podemos observar que el área del cuadrado mayor también se puede expresar como el área del cuadrado inscrito más el área de los cuatro triángulos, de donde tenemos:

$$(a+b)^2 = c^2 + 4\frac{ab}{2}$$

Simplificando,

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Esta última es la relación que se estaba buscando.

Es importante resaltar que existen algunas otras estrategias para la demostración como las de forma “si y solamente si”, que puede verse como demostrar una implicación en dos sentidos opuestos, denominados condiciones necesaria y suficiente; la prueba por el contra-recíproco que es una variación lógica de la implicación, donde se aprovecha el hecho de que si se tiene una implicación como $A \Rightarrow B$ entonces ésta es equivalente a tener $\sim B \Rightarrow \sim A$. Por ejemplo la afirmación siguiente: demostrar que si $n \in \mathbb{Z}$ y n^2 es impar, entonces n también es impar; es equivalente a demostrar: si n es par, entonces n^2 también es par. En efecto, si n es par, es de la forma $n = 2k,\ k \in \mathbb{Z}$; así vemos que $n^2 = (2k)^2$. Es claro que de esto se deduce que n^2 es par, ya que $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$, con $2k^2 \in \mathbb{Z}$. De esta forma se ilustra el contenido lógico del contra-reciproco.

Dos aspectos claves en el ámbito de las demostraciones en matemáticas, que juegan un papel más desde lo práctico, en el sentido de Lakatos, son *los contraejemplos* y las *conjeturas.* Los contraejemplos surgen como elementos claves para probar algunos teoremas o proposiciones que por métodos directos son muy complicados de demostrar. Una de forma útil de ver cómo funciona el proceso de construcción de contraejemplos se presenta al demostrar las conjeturas. Una conjetura es también una proposición cuyo valor de verdad parece ser verdadero o falso, pero no se tiene certeza alguna si una estrategia como las mencionadas hasta aquí sea útil para construir su demostración; con un simple contraejemplo podemos refutar una conjetura o cualquier otra proposición.

Por ejemplo, El primero de diciembre de 1729 Christian Goldbach le escribió una carta a L. Euler[1] donde le preguntaba "¿Conoce usted la observación de Fermat de que todos los números de la forma $2^{2^n} + 1$ son primos?" Pastor J. y Bosch C. (2001, Pág. 115). Sí $n \in \mathbb{N}$, en efecto se puede comprobar fácilmente que esto es cierto para los números $n = 1, 2, 3, 4$, sin embargo cuando $n = 5$ observamos que

[1] Euler logro demostrar que la conjetura era falsa utilizando un resultado del mismo Fermat conocido como pequeño teorema de Fermat; se debe aclarar además, que la factorización de un número tan grande no era fácil para la época, por lo cual aunque hoy parezca trivial el problema no era sencillo para su tiempo.

$$2^{2^5}+1=4294967297=(641)(6700417)$$

El número $2^{2^5}+1$ no es primo, de hecho es un número compuesto, por lo tanto no podemos entonces concluir que la proposición sea cierta, es decir, $2^{2^5}+1$ es un contraejemplo que refuta la afirmación $2^{2^n}+1$ es primo, para todo $n\in\mathbb{N}$.

2. Teoremas y Demostraciones

En este capítulo se presentan varios teoremas y demostraciones que se pueden presentar en el aula de clase de tal forma que nos permitan observar las regularidades para identificar los elementos claves en el uso de la demostración como herramienta didáctica.

Estos ejemplos provienen de diferentes áreas de la matemática, por lo cual nos brindan un panorama general de los diferentes temas que se pueden abordar en el aula con el uso de las demostraciones, anotando que en cualquier tema previsto para la enseñanza a nivel secundario en Colombia podemos incluir un sistema de pruebas o demostraciones para la generación de los conceptos esenciales y el entendimiento y comprensión de las diferentes proposiciones que constituyen la esencia del objeto matemático que se desea que los estudiantes analicen. Nuestro primer ejemplo es tomado del álgebra.

Sean a,b enteros positivos donde $a = b + 1$, entonces

$$a^2 - b^2 = a + b$$

El problema[2] inicial, planteado por el docente, alcanza de entrada su primer obstáculo: la mayoría de los estudiantes no tiene idea de cómo puede empezar la demostración de una afirmación de este tipo. Es posible que esto se deba a que

[2] La idea fundamental de Lakatos es la de una conjetura inicial; sin embargo, en esta propuesta se cambia la palabra conjetura por problema, dado que el enfoque es el de mirar la demostración, que es central a la propuesta de Lakatos, como una tarea compleja de resolución de problemas.

el estudiante no está familiarizado ni con los diferentes métodos de demostración, ni con las estrategias generales de razonamiento que le permitan abordar el problema.

Incluso, es poco frecuente que el primer paso sea una verificación empírica sobre la proposición, a pesar de que en general la visión tradicional de las matemáticas ha desarrollado una visión conductual, en la cual se privilegia las relaciones de primer nivel, como manipulaciones algebraicas que consisten en reemplazar valores en una ecuación.

Observemos el siguiente ejemplo: $2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3 = 2 + 1$ es cierto entonces, que este tipo de expresión puede verificarse para los valores de a y b cualquiera, el conocimiento de este hecho no es reconocido por el estudiante como un elemento nuevo en el problema, es decir el estudiante no agrega paulatinamente nuevas hipótesis que surgen de la experimentación sobre la proposición. Es en este punto que cobra vida la propuesta de Lakatos, en tanto puede lograrse que el estudiante sea capaz de agregar nueva información, hipótesis o conjeturas a la solución de un problema.

La propuesta tradicional de observar las matemáticas en general como un conjunto de cálculos y manipulaciones meramente simbólicas se ataca mediante la didáctica de la demostración; esto es, que el estudiante adquiera la habilidad de ver una demostración, no como un procedimiento más, sino como una tarea compleja (aunque no necesariamente complicada) de resolución de un problema.

En general, la idea del método de Lakatos, es que los estudiantes observen que la afirmación se cumple para ciertos valores de a y b, en primera instancia, pero que además puedan verificar fácilmente este hecho; es decir, dar un argumento informal a través de la experimentación; en efecto, se puede mostrar (o lograr que los estudiantes vean por sí mismos) a los estudiantes que los valores consecutivos como $5^2 - 4^2 = 5 + 4$, $10^2 - 9^2 = 10 + 9$, incluso para valores grandes de a y b: $100^2 - 99^2 = 100 + 99$; Sin embargo, es evidente que esto no constituye una prueba en el sentido formal, aunque aporta pistas para reconocer posibles argumentos para la demostración.

En esta primera fase, el estudiante se involucra en la consecución de datos relevantes para el problema, ya sea mediante la experimentación directa o a partir de los conceptos implícitos en la problemática planteada.

Rápidamente los estudiantes se enfrentan a un problema serio, consistente en no poder verificar la validez de la expresión para todos los valores de a y b, de esta forma su acercamiento a un argumento se debe buscar en aspectos más generales que la verificación de valores particulares, este es el núcleo donde se requiere la fase de generalización del problema.

Ahora puede intentar la búsqueda de un contraejemplo, ello también puede aportar información sobre el problema inicial, en este caso, se puede pedir a los estudiantes que muestren un contraejemplo donde no se cumpla la proposición inicial.

Así, desde la perspectiva didáctica se muestra por ejemplo que $si\ a = {}^{3}\!/_{2}, b = {}^{1}\!/_{2}$, entonces podemos observar lo siguiente: claramente $a = b + 1$ y por tanto tendríamos que

$$a^2 - b^2 = a + b$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = 2,$$

Si observamos ahora la suma $a + b = {}^{3}\!/_{2} + {}^{1}\!/_{2} = 2$, con lo cual se cumple nuestra condición, obsérvese que los números ${}^{3}\!/_{2}$, ${}^{1}\!/_{2}$ son números racionales, es decir se amplía más allá del dominio de los enteros positivos nuestra expresión; si consideramos enteros negativos, también se cumple la proposición: veamos, si $a = -2$, $b = -3$, es claro que $a = b + 1$; $-3 + 1 = -2$ y tenemos que $a^2 - b^2$ es:

$$\left(-2\right)^2-\left(-3\right)^2=4-9=-5$$

$$=a+b=-2+\left(-3\right)=-5$$

Así que desde la perspectiva de Lakatos, la búsqueda de contraejemplos nos arroja un resultado más interesante aún: la proposición se cumple para números racionales y enteros negativos. Lakatos (1978b) ha discutido el hecho de que en ciertas ocasiones la búsqueda de contraejemplos sobre las hipótesis auxiliares se convierte en un fundamento más para apoyar una teoría o programa de investigación.

En el sentido didáctico, el docente ahora puede intervenir en la búsqueda, con el propósito de orientar a los estudiantes. En este punto se puede abrir la discusión y critica de los argumentos presentados hasta el momento, para apuntar hacia una posible solución de carácter más general. El paso a un argumento de carácter algebraico sería decisivo para resolver el problema; el asunto es cómo hacer que los estudiantes reconozcan el paso hacia este tipo de generalización, a partir de sus propios análisis, explicaciones y justificaciones.

A partir de este momento podemos, de acuerdo a la propuesta de Lakatos, identificar un argumento plausible para esbozar con mayor generalidad la demostración del teorema o proposición planteada inicialmente.

Una posibilidad es sugerir el análisis de la condición inicial que nos plantea el problema, en este paso al estudiante se le pide que analice la ecuación:

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b),$$

Es vital que se les haga entender a los estudiantes que esta relación que se plantea en la ecuación anterior, es un apoyo conceptual clave, dado que es una relación bien conocida (diferencia de cuadrados); es un caso de factorización muy útil en el algebra, dado que muchos problemas presentan relaciones similares.

El esquema conceptual ahora recibe un elemento más para incorporar a todos los elementos que se han ido recogiendo hasta ahora; lo esencial en este paso es que el estudiante sea capaz de desarrollar de forma útil las relaciones entre la información recopilada, interpretando la naturaleza de los datos, objetivos, posibles vías de solución del problema, patrones y regularidades.

En este punto, es clave separar la problemática asociada a la comprensión del lenguaje y notación del lenguaje matemático y la que se presenta a partir de la comprensión de los conceptos; para ello se verifica el uso del lenguaje y la coherencia de la notación, con su correspondiente concepto asociado. De otro lado se identifica cuáles conceptos no se comprenden bien o se malinterpreta su uso en el sistema conceptual construido a partir de la prueba, cuáles de estos son indispensables en la construcción del argumento principal; qué definiciones, axiomas o reglas de inferencia pueden ser útiles, cómo se pueden articular los ejemplos y contraejemplos al argumento de la prueba, qué método de prueba sería eventualmente más preciso para la demostración.

Si exploramos la condición $a=b+1$, en la ecuación anterior, podemos ver que $(b+1)^2-b^2=a+b$ donde la sustitución algebraica de a por $b+1$, es algo sofisticada si pensamos en el desarrollo del argumento para la prueba; en la visión de los estudiantes este paso no se desarrolla hasta no adquirir experiencia con el álgebra y los significados de sus símbolos; básicamente el hecho de tener en cuenta la premisa de que $a=b+1$, no tiene mayor significado para ellos y, en caso de que sí lo tengan en cuenta, el signo de igualdad no constituye el valor algebraico de la sustitución mencionada anteriormente.

Volviendo a la ecuación que estamos analizando tenemos que:

$$(b+1)^2-b^2=\left(b^2+2b+1\right)-b^2$$

$$=2b+1=b+(b+1)$$

$$=a+b$$

Aunque este argumento no es una prueba formal, en el sentido axiomático planteado en el capitulo anterior, adquiere un carácter algebraico-simbólico más general, y apunta hacia una nueva perspectiva que podría explicar con mejor detalle la verdad o falsedad de la afirmación. Un argumento similar puede mostrarse de la siguiente manera:

Considerando de nuevo la condición $a = b + 1$; de aquí, (aunque no sea evidente para los estudiantes), se puede analizar la versión $a - 1 = b$, y por lo tanto la ecuación $a^2 - b^2 = a + b$ toma la forma siguiente:

$$a^2 - (a-1)^2 = a + (a-1)$$

que se puede expresar de nuevo, desarrollando el binomio al cuadrado, de esta forma:

$$a^2 - (a^2 - 2a + 1) = a^2 - a^2 + 2a - 1$$

$$= 2a - 1 = a + (a-1)$$

$$= a + b$$

Desde este punto de partida algebraico, se debe hacer notar al estudiante que la necesidad de generalidad de las pruebas surge a partir del uso de las variables; que esto simplifica los argumentos y los casos particulares que se han visto obligados a desarrollar en la primera fase de acercamiento al problema de la demostración.

El razonamiento algebraico de este problema requerirá que los estudiantes reconozcan los diferentes tipos de manipulaciones algebraicas que pueden realizar con las ecuaciones y las condiciones planteadas por la demostración requerida para validar la afirmación.

Partiendo de la ecuación $a^2 - b^2 = a + b$ tenemos:

$a^2 - b^2 = a + b$. Además tenemos que

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Pero sabemos que $a = b+1$, de donde $a - b = 1$, por tanto se tiene que:

$$a^2 - b^2 = a + b$$

El esquema de prueba presentado a los estudiantes debe ser un esquema que permita una dinámica comprensiva para entender los argumentos de la prueba; ello implica que los estudiantes identifiquen las manipulaciones algebraicas, el proceso de inducción-deducción que dirige la construcción de la prueba, los mecanismos lógicos subyacentes, las hipótesis y axiomas que puede conocer el estudiante, y sobre todo el manejo de estos elementos y las posibles relaciones que se establecen para construir los argumentos de la prueba.

Lo más común es que los estudiantes manifiesten “no conocemos esa fórmula”, “eso no lo hemos visto”, u otras justificaciones similares. Esta propuesta para la inclusión de los teoremas y sus demostraciones busca presentar la demostración desde una perspectiva didáctica como una compleja tarea de resolución de problemas; de esta forma el objetivo no es *declarar* la utilización de la prueba dentro del aula para validar el conocimiento matemático, lo que resulta en una “ritualización del uso de las demostraciones” dado que el docente no revela ninguna de las estrategias para construir los argumentos, teniendo en cuenta que el enfoque ritual de la prueba formal no pretende *explicar* un concepto sino que solo se interesa en validar un conocimiento matemático.

En general lo que sucede en la enseñanza de las pruebas y las demostraciones a nivel secundario es que, en los pocos casos en los que se presenta una demostración en el aula, el estudiante lo que hace es ver al docente escribir (ni siquiera producir) una gran cantidad de operaciones, generalmente simbólicas, con las cuales no está familiarizado, y si lo está, aun no reconoce cómo encajan dentro de la larga cadena de razonamientos que sustentan un argumento; se asume que solo por haberle puesto como título “demostración”, el estudiante debe comprenderla. En definitiva, el estudiante no hace parte del proceso de producción de la prueba, no reconoce el proceso de pensamiento del docente, no se le ha enseñado cómo puede apropiarse de una demostración producida por otros, y mucho menos cómo producir una por sus propios medios, dado que no se le ha familiarizado, mediante su proceso de aprendizaje, con comprender qué es una prueba, cómo se estructura una demostración, cuáles son los diferentes tipos de demostraciones, y qué es un argumento deductivo o inductivo.

Ahora, la respuesta obvia no siempre es la correcta; este tipo de problemas se caracteriza por que su solución es simple, pero no sencilla. En efecto, la tradición educativa en el país inmediatamente recurriría al currículo para resolver el problema: en el sentido de lo expuesto anteriormente, entonces se haría (mediante un mandato del ministerio) una reforma curricular en los planes de estudio que se desarrollan en las instituciones educativas, para incluir los temas que aparentemente darían las bases para "aprender a demostrar", lo que claramente resultaría en un nuevo fracaso.

¿Cómo involucrar una demostración el aula de clase? Es la pregunta que se quiere responder con esta propuesta. Inicialmente se debe reconocer que hace falta investigación empírica en Colombia que permita documentar el proceso implícito en el aprendizaje de una demostración, en general de una afirmación cualquiera ya sea una proposición, teorema o un problema complejo.

En este caso la didáctica nos permitirá disponer de algunas herramientas conceptuales en el manejo de la presentación, análisis, desarrollo, construcción, y comunicación de argumentos diseñados para explicar el porqué de la verdad o falsedad de un teorema o afirmación y, sobre todo, acceder a la comprensión del concepto o conceptos subyacentes a la demostración y los argumentos utilizados.

Una idea inicial para entender el carácter de la demostración desde el punto de vista didáctico surge en Sowder y Harel (2003; págs. 263 y siguientes), cuando expresan que la prueba debe ser "tangible" para el estudiante; ello implica tres características fundamentales:

1. La prueba debe ser *concreta*, es decir debe manejar conceptos que los estudiantes deben concebir como objetos matemáticos que ellos puedan o sepan manejar, como lo hacen con los números por ejemplo.
2. *Convincente,* los estudiantes deben comprender la idea subyacente al desarrollo de la demostración, no solamente cada uno de los pasos de que consta.
3. *Esencial,* los estudiantes deben ser capaces de ver la necesidad de justificar cada uno de los pasos.

Estas condiciones son flexibles; es decir, dependen de la formación preliminar de los estudiantes; además son subjetivas debido a que estos tres elementos no necesariamente implican que un estudiante entienda la idea de una demostración, dado que los razonamientos, procesos y habilidades para la comprensión de un concepto no se da de igual forma en todos los estudiantes.

Finalmente, la condición de esencialidad nos indica que el estudiante pueda prevenirse de cometer un error lógico-deductivo en la argumentación y evitar así falacias en el razonamiento, ya que a pesar de que no estamos operando con el esquema de prueba *autoritario* (el ritual de formalización es a menudo llamado autoritario ya que impone la prueba y no la construye) es necesario que el estudiante razone de una forma correcta.

El reto que impone la presentación de una prueba en el aula se basa en la capacidad que tenga el docente para establecer una situación-problema que provoque la necesidad intelectual de los estudiantes para buscar uno o varios argumentos que permitan hallar la solución del problema y extraer de ésta los conceptos matemáticos relevantes para su aprendizaje.

Una de las perspectivas de análisis que se ha querido discutir en este trabajo ha sido tratar la prueba como una tarea que pueda incluir una actividad para demostrar en el aula; el problema de crear una prueba. El siguiente ejemplo nos muestra una idea de estos aspectos generales de la prueba en matemáticas.

Se trata de interpretar un primer acercamiento a la parte fundamental de una demostración y es el sistema axiomático implícito para el desarrollo de la prueba.

En efecto, en el sentido formal la prueba deductiva es una secuencia finita de proposiciones derivadas de unos axiomas iniciales con base en unas reglas de inferencia establecidas.

Consideraremos el sistema Γ de generación de cadenas finitas de I's y O's. El sistema Γ tiene un solo axioma, I; tiene además, 5 reglas fundamentales: sea S cualquier cadena finita de I's y O's, entonces

1. Regla: $S \to SOO$
2. Regla: $S \to SII$
3. Regla: $SIOO \to SIO$
4. Regla: $SOII \to SOI$
5. Regla: $IS \to S$

Las reglas del sistema son sencillas, la primera regla permite agregar dos O al final de cualquier cadena finita S. Análogamente la regla dos permite añadir dos I al final de cualquier cadena finita S. La regla tres permite eliminar una O de cualquier cadena finita que termine en IOO. La regla cuatro permite eliminar una I del final de cualquier cadena finita que termine en OII y la regla cinco permite eliminar una I al inicio de cualquier cadena que empiece por I.

Demostrar el siguiente teorema:

Teorema: $IIOOI$

Prueba:

I	(Axioma)
III	(Regla 2)
II	(Regla 5)
$IIOO$	(Regla 1)
$IIOOII$	(Regla 2)
$IIOOI$	(Regla 4)

Está claro que esta demostración corresponde a una prueba directa, donde específicamente cada una de las premisas de la prueba surge directamente de una regla de inferencia definida, y el uso de las reglas se ha hecho de forma válida; es decir, se han aplicado correctamente, generando un argumento preciso para demostrar el teorema.

Esto significa que el objetivo de analizar este tipo de ejemplos es que el estudiante observe la relación de la información del teorema y el uso de las reglas de inferencia propuestas, esta es la clave para identificar el camino que conduce a la justificación de la prueba del teorema.

Consideremos ahora el siguiente teorema:

$Teorema : IOIOOIIOIO$

Prueba:

I	(Axioma)
IOO	(Regla 1)
IO	(Regla 3)
$IOII$	(Regla 2)
IOI	(Regla 4)
$IOIOO$	(Regla 1)
$IOIOOII$	(Regla 2)
$IOIOOIIOO$	(Regla 1)
$IOIOOIIO$	(Regla 3)
$IOIOOIIOII$	(Regla 2)
$IOIOOIIOI$	(Regla 4)

El procedimiento es el mismo del teorema anterior; en general el esquema de prueba deductiva en el sistema de teorema, demostración y reglas válidas de inferencia; también adquiere una dinámica similar, aunque en ocasiones las reglas de inferencia se usan sin hacer mención explícita de ellas por lo cual a veces no claro identificar la relación entre estos tres elementos; el ejemplo anterior nos muestra una forma de analizar otras proposiciones teniendo en cuenta el esquema general de prueba.

Podemos realizar una investigación exhaustiva sobre las propiedades del sistema IO: qué tipo de teoremas, proposiciones, conjeturas, proposiciones no se pueden demostrar, entre otras propiedades. Por ejemplo, existen condiciones que digan cuándo una demostración de un teorema es más larga que otra, ¿depende la complejidad de una prueba, de la cantidad de símbolos de la cadena que formula el teorema? En efecto podemos, en el espíritu de nuestro método, conjeturar[3] lo siguiente: *a medida que la cadena que representa a un teorema, sea más larga, su demostración es más compleja, es decir más larga.*

Observemos qué sucede con este tipo de conjeturas. Debemos buscar evidencia que muestre que en efecto a medida que la cadena que forma una proposición es más larga entonces su demostración es más compleja, es más larga, en el sentido que tiene más pasos. Inicialmente es bastante complejo dar un argumento formal, para mostrar si la conjetura es cierta o falsa; por otro lado, verificar información empírica tomando una serie de teoremas y sus demostraciones es bastante engorroso, pero se pueden explorar varios ejemplos con los estudiantes.

Otro elemento que podemos tener en cuenta es refinar la conjetura, lo que sugiere adicionar condiciones sobre esta. En este caso podemos decir que la conjetura se modifica, si asumimos que solo se tiene en cuenta para medir la complejidad de un teorema, el número de pasos partiendo de los axiomas y las reglas de inferencia, sin suponer ninguna otra hipótesis auxiliar.

Aun así, el tratamiento del problema es algo tedioso todavía, debido a la necesidad de verificar una gran cantidad de teoremas y sus demostraciones; sin embargo, podemos explorar la construcción de contraejemplos, consideremos los teoremas OI y $IIIIIOO$, en efecto es claro que el primer teorema está compuesto de una cadena más corta, de dos símbolos, mientras que el

[3] Teniendo en cuenta además que los estudiantes tienden a realizar este tipo de generalizaciones, en el trabajo de Lakatos se denomina la conjetura ingenua (naive conjecture).

segundo teorema está constituido por una cadena más larga, de siete símbolos, por lo tanto debería cumplirse que la demostración del segundo teorema sea más compleja. Veamos:

$Teorema: OI$

Prueba:

I	(Axioma)
IOO	(Regla 1)
IO	(Regla 3)
$IOII$	(Regla 2)
IOI	(Regla 4)
OI	(Regla 5)

$Teorema: IIIIIOO$

Prueba:

I	(Axioma)
III	(Regla 2)
$IIIII$	(Regla 2)
$IIIIIOO$	(Regla 1)

Es evidente ahora que no se cumple la conjetura de acuerdo a nuestro contraejemplo. La pregunta que ahora surge es: ¿es válido el contraejemplo?; si observamos las dos demostraciones, debemos establecer un criterio que nos determine con certeza que no existen otras demostraciones de los teoremas en las mismas condiciones, que sean más cortas que las que hemos mostrado, es decir, debemos definir una *demostración mínima*.

En realidad se puede seguir analizando las conjeturas y teoremas; además, formular otras preguntas, por ejemplo, ¿es posible demostrar *OOOOOOO* a partir de OI? Y así sucesivamente tendríamos una gran cantidad de ejercicios y tareas para estudiar el sistema o incluso para construir un sistema particular.

La geometría también es fuente de una amplia variedad de ejemplos y técnicas de demostración que permiten explorar el método adaptado de Lakatos para realizar tareas en el aula que involucren el desarrollo de una demostración; un ejemplo clásico se denomina prueba a doble columna, donde se ubican, en un lado las premisas y al otro lado las conclusiones con sus respectivas justificaciones.

Analicemos el siguiente ejemplo: de acuerdo a la Fig.3 se observa que los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ sobre las rectas *paralelas* l y m tienen la misma medida (son congruentes, es el término más preciso en geometría). Se desea probar que ello implica que, en este caso especifico de acuerdo a la gráfica, los segmentos $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ también son congruentes.

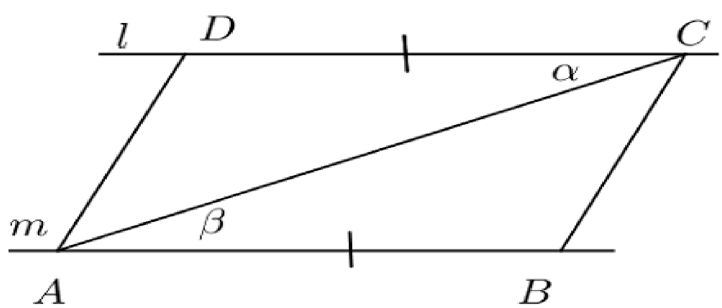


Fig.3

Prueba:

1. $\overline{AB} = \overline{CD}$	1. Dado por la hipótesis
2. $\overline{AC} = \overline{AC}$	2. Cualquier número es igual a sí mismo.
3. $\measuredangle\alpha = \measuredangle\beta$ Por tanto,	3. Son ángulos alternos-internos
4. $\triangle ABC = \triangle DCA$ de donde:	4. Criterio LAL
5. $\overline{BC} = \overline{DA}$	5. Lados correspondientes de triángulos semejantes son congruentes.

Tabla 1.

En geometría el método que se denomina prueba a dos columnas, consiste en ubicar en la columna de la izquierda, una cadena deductiva de enunciados que converjan a la proposición a probar, asignándole un número de orden a cada enunciado. Para cada paso de la deducción, uno debe anotar la razón de la misma en la columna de la derecha bajo el correspondiente número de orden; ésta técnica es en cierta forma, aparentemente clara para quien observa la prueba.

No obstante, las suposiciones sobre el desarrollo de la prueba realmente no explican nada sobre la naturaleza de los objetos y conceptos matemáticos involucrados en la resolución del problema, aun cuando se trata incluso de una prueba general deductiva, debemos recordarle al estudiante que aunque está basada en una figura particular, puede por un lado ser general, dependiendo de las hipótesis que la sustenten; mientras que por otro lado puede ser simplemente un caso particular si las hipótesis sobre las que se configura la grafica no son generales.

Nos referimos por ejemplo al siguiente problema conceptual: ¿qué pasaría si la grafica mostrada fuera la siguiente?

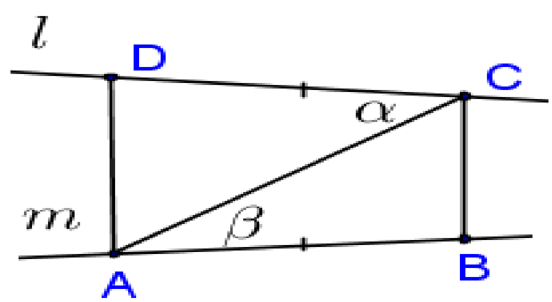


Fig. 4

Es fundamental reconocer que la hipótesis central del problema, es que las rectas l y m son paralelas; de lo contrario, no es posible que se cumplan todas las proposiciones que sustentan la prueba a dos columnas de la Tabla 1. Es muy complejo identificar algunas veces este tipo de dificultades, lo cual es muy común en la enseñanza de las proposiciones en geometría, en donde los conceptos, al ser bastante intuitivos, implican una serie de problemas de comprensión para hallar su generalización, debido a que habitualmente se tiende a confundir la “evidencia empírica” (el diagrama o la figura) con una prueba general.

De acuerdo a Chazan, “si los estudiantes (entrevistados) creen que la prueba deductiva muestra una conclusión verdadera para todos los objetos que satisfacen las condiciones “dadas”…de ser así, se les pregunta si pueden dibujar una figura nueva que cumpla las mismas condiciones iniciales pero que no mantenga la conclusión verdadera” (Chazan, 1993, Pág. 366).

Este ejemplo abre la puerta para analizar el tema de los contraejemplos; en este sentido es recomendable preguntarle al estudiante si es capaz de dibujar cierta situación geométrica que configure un contraejemplo para la proposición anterior, dando lugar a la verificación y comprensión de las condiciones necesarias para que se cumpla el enunciado, además que el estudiante sea capaz de analizar diferentes situaciones en las cuales ponga en juego el conjunto de relaciones aprendidas en el estudio de una situación específica mediante una prueba deductiva.

Una manera de proceder con el objeto de procurar hacer más comprensible la demostración a dos columnas es proponer una actividad, en la que el estudiante logre concluir que para que se cumpla la demostración de la Tabla 1, las rectas deben ser paralelas, ello se puede lograr replanteando la actividad, de la siguiente forma:

- Se presenta primero la Fig. 4, se dan las hipótesis iniciales sobre los segmentos congruentes $\overline{AB} = \overline{CD}$, los ángulos $\measuredangle\alpha = \measuredangle\beta$ y se realiza la conjetura primitiva ¿bajo qué condiciones los segmentos $\overline{BC}$ y $\overline{DA}$ son congruentes?
- Se orienta a los estudiantes a realizar varias gráficas sobre el problema, de tal forma que el docente oriente la discusión para hallar la idea de que las rectas deben ser paralelas y a partir de esta información esbozar varios argumentos de prueba.

- Finalmente, es posible que se pueda demostrar la proposición de una manera totalmente diferente a la forma como se presento en la Tabla 1. No obstante, es claro que en la búsqueda de los argumentos para la demostración del teorema se debe reconocer que la hipótesis fundamental es que las rectas son paralelas y ello implica generalización de resultados particulares.

Finalmente, este último detalle es importante para el uso de los ejemplos traídos desde la geometría; el hecho de que la evidencia conduce a una idea general para probar o refutar una proposición, aunque esta se haya planteado como un simple ejercicio, puede ilustrarse con el siguiente ejemplo.

Teorema: Del Ángulo Exterior de un Triangulo

“En todo triangulo, la medida de un ángulo exterior es igual a la suma de las medidas de los ángulos interiores no adyacentes al ángulo exterior mencionado”.

Para hacer uso del método adaptado de Lakatos, se considera este teorema como el problema inicial a analizar; observamos que es relativamente fácil construir un triangulo cualquiera[4]. Cada estudiante seguramente le dará forma a su triangulo. Es muy común que los estudiantes construyan triángulos rectángulos la mayoría de las veces, no obstante es importante asegurarse de que se revisen todos los casos y la prueba se haga de forma general.

[4] Obsérvese que en este caso no se presenta ninguna figura inicial dado que lo que se intenta incentivar es la capacidad de relaciones visuales que se pueden extraer de la información producida por el enunciado del teorema.

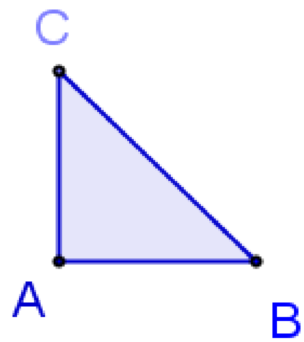


Fig. 5

El siguiente paso consiste entonces en pedirle a los estudiantes que escojan un vértice cualquiera del triangulo; notemos que las elecciones de los estudiantes son aleatorias, tanto en cuanto al tipo de triangulo como al vértice que ellos elijan, tal como lo podemos ver en la Fig. 6

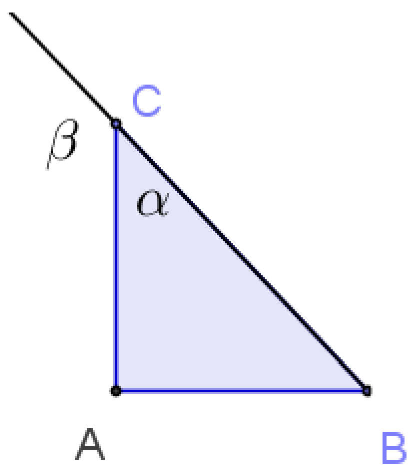


Fig. 6

Luego de esto, se les pide que le den valores, también aleatorios, a los ángulos no adyacentes al ángulo exterior, de acuerdo al vértice que ellos han elegido, un ejemplo se puede ver en la la Fig. 7; es claro que los estudiantes deben tener en cuenta implícitamente que la suma de los ángulos interiores de un triangulo cualquiera en la geometría euclidiana es 180 grados, que en este caso es nuestra hipótesis fundamental; por ello, aunque los valores sean aleatorios deben cumplir esta restricción (si se requiere, el docente debe advertir de esta propiedad de los triángulos); en este sentido es crítico para la resolución del problema que los estudiantes reconozcan además que el ángulo exterior a un triángulo es suplementario con el ángulo adyacente, por lo cual se cumple que su valor es la suma de los dos ángulos restantes no adyacentes al ángulo exterior.

En primera instancia puede parecer un resultado complejo y difícil de demostrar, pero luego de ver la dinámica de las relaciones entre los objetos matemáticos (geométricos en este caso) que se muestran en la proposición, podemos identificar varios elementos que coinciden con la propuesta planteada. Ahora funciona el método propuesto, en tanto nos permite recoger mucha información empírica a partir de los valores particulares con el objeto de generar argumentos para la demostración del teorema.

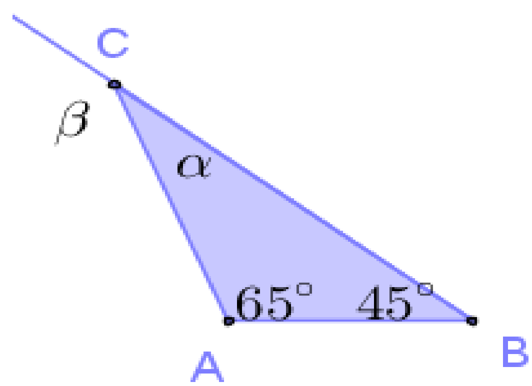


Fig. 7

A partir de estos elementos, se puede establecer una demostración general. En efecto, consideremos la Fig. 8

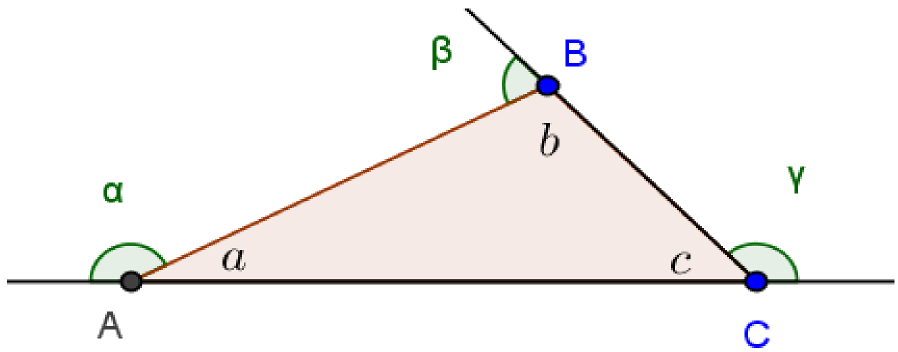


Fig.8

Vamos a mostrar[i] que:

$$\measuredangle a + \measuredangle c = \measuredangle \beta$$

Partimos inicialmente de que $\measuredangle b + \measuredangle \beta = 180°$, ya que los ángulos b y β son ángulos suplementarios; por lo tanto, $\measuredangle \beta = 180° - \measuredangle b$; sabemos además que

$$\measuredangle a + \measuredangle b + \measuredangle c = 180°$$

De aquí podemos ver que $\measuredangle a + \measuredangle c = 180° - \measuredangle b$, por tanto tenemos que

$$\measuredangle a + \measuredangle c = \measuredangle \beta \,.$$

Es clave identificar qué tipo de teoremas se pueden utilizar para adaptarlos al método de Lakatos; en nuestro caso, este ejemplo es de fácil aplicación del método a seguir para identificar las posibilidades didácticas que plantea el problema propuesto.

Observemos que es importante en el ejemplo anterior tener en cuenta que el objetivo de aprendizaje requiere del conocimiento de varios conceptos; en especial la propiedad de que la suma de los ángulos interiores de un triangulo es 180°; en este sentido una posibilidad de análisis del problema puede ser el debilitar un poco esta idea; preguntarle a los estudiantes que pasaría si no fuera cierta esta propiedad, que tipo de formas geométricas nos conduciría como consecuencia que esta propiedad no fuera cierta; en general esto se puede hacer con cada ejemplo y da como resultado una discusión muy útil para aclarar los conceptos centrales a la prueba y su rol dentro de la demostración.

Otro de los aspectos importantes del uso de las demostraciones en el aula y el desarrollo de las reglas fundamentales de inferencia, es la demostración por casos, la cual es útil en tanto permite al docente un juego lógico de experimentación y análisis en los estudiantes, de tal suerte que el estudiante tiene ante sí un esquema diferente de demostración, donde no basta seguir las consideraciones lógicas generadas a partir de la información explicita e implícita que se le presenta en el teorema o proposición, sino que por otro lado, le corresponde establecer un punto de partida, (eminentemente lógico) a partir de su experiencia; luego articula sus consideraciones lógicas y experimenta, en cierta forma con las posibilidades que le brinden los elementos que pone en relación, o casos particulares de la proposición, hasta hallar una prueba general de ésta.

Observemos la dinámica que nos plantea el siguiente ejemplo:

Teorema: Existen números irracionales b y c *tales que* b^c *es un número racional.*

Demostración: consideramos el número $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$; observemos que este número puede ser racional o irracional.

Si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ es racional, entonces hemos hallado nuestros números $b = c = \sqrt{2}$.

Supongamos, de otro lado, que $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ es irracional, entonces tomamos los valores valor $b = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ y $c = \sqrt{2}$ y calculamos b^c:

$$
\begin{aligned}
b^c &= \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} \\
&= \sqrt{2}^{\left(\sqrt{2}.\sqrt{2}\right)} \\
&= \sqrt{2}^{2} \\
&= 2
\end{aligned}
$$

Y claramente 2 es un número racional.

En este caso vemos que sin importar si $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ es racional o irracional hemos hallado valores b y c para los cuales b^c es racional.

En este tipo de pruebas lo interesante es la estructura lógica que subyace a la demostración, en el sentido de la disyunción. En la mayoría de los casos el estudiante no comprende por qué independientemente del hecho de que $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ sea racional o irracional es posible llegar a la conclusión que se busca; en efecto, el argumento en forma de disyunción parte de la idea de que si tenemos dos premisas p o q que soportan una conclusión s entonces si se cumplen ambas, o cualquiera de las dos, se puede concluir s; en general este tipo de pruebas no está limitado solo a dos casos sino que se puede extender a finitos casos. Es esencial que observemos además que la hipótesis central es el hecho que un número real cualquiera es racional o es irracional; esto se garantiza que se han considerado todos los casos posibles.

Consideremos el siguiente ejemplo, propuesto desde la geometría, (en este caso, el ejemplo es tomado de Rubinstein, (Rubinstein et al., 1995)). Consideremos la siguiente figura

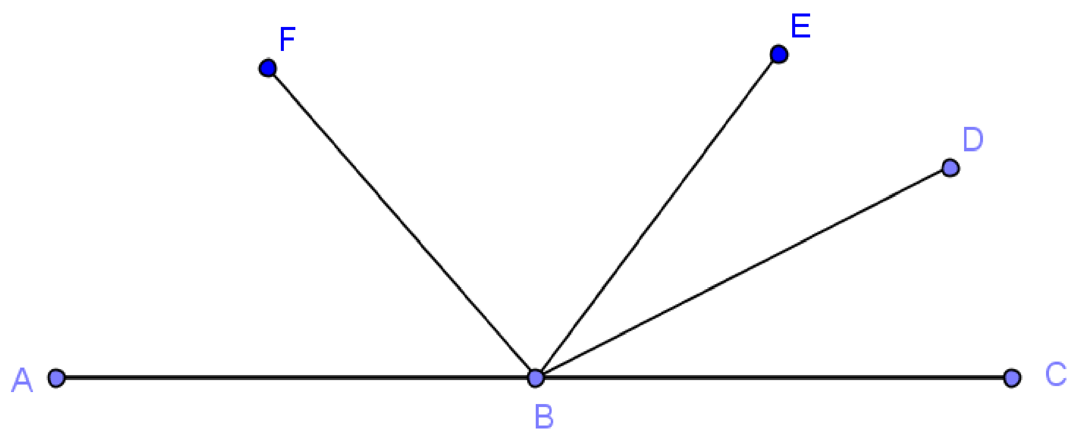


Fig. 8

En la Fig. 8 se muestra el ángulo llano $\measuredangle ABC$; además, se tiene que la $m\measuredangle ABF = m\measuredangle FBE$ y $m\measuredangle EBD = m\measuredangle DBC$, se pide entonces demostrar que $\measuredangle FBD$ es un ángulo recto.

En primer lugar, este ejemplo no es lo que formalmente entendemos como un teorema, en el sentido clásico, es más bien, un ejercicio en el cual la tarea principal es lograr que el estudiante realice una demostración. En este sentido, se introduce al estudiante en el análisis general de la situación propuesta, dándole elementos para que empiece la búsqueda de la información relevante para completar dicha actividad. El estudiante puede enfrentar sin temores la demostración debido a que se presenta como un ejercicio común.

En efecto, se trata de identificar las hipótesis que subyacen en el problema, los elementos claves y las preguntas que conducen a dar respuesta o a la búsqueda de una forma de argumentar sobre la validez del enunciado planteado.

La pregunta fundamental que contiene las hipótesis necesarias para la solución del problema se halla al encontrar la relación entre los bisectores de los ángulos suplementarios, dando por sentado que el estudiante puede entender que el concepto de bisector implica dividir un ángulo en dos partes iguales.

Otro elemento importante en este problema radica en que el estudiante debe guiarse de tal forma que sea capaz de manipular los elementos geométricos implícitos en la actividad como elementos algebraicos, en tanto se pueden al ser manipulados algebraicamente ángulos, segmentos o distancias.

Teniendo estos elementos en consideración realizamos la demostración; es decir, hallamos la solución del problema planteado. Una forma de hacerlo puede ser observar que

$$m\measuredangle ABF + m\measuredangle FBE + m\measuredangle EBD + m\measuredangle DBC = 180^0 \quad (*)$$

ya que el ángulo $\measuredangle ABC = 180^0$ dado que es una ángulo llano. Además, sabemos que:

$$m\measuredangle ABF = m\measuredangle FBE$$
$$m\measuredangle EBD = m\measuredangle DBC$$

en tanto dicha información nos la proporciona el ejercicio. Por tanto de la ecuación $(*)$, en combinación con el hecho de que $m\measuredangle FBE + m\measuredangle EBD = m\measuredangle FBD$, tenemos

$$2m\measuredangle FBE + 2m\measuredangle EBD = 180^0$$
$$m\measuredangle FBE + m\measuredangle EBD = 90^0$$
$$m\measuredangle FBD = 90^0$$

Que finalmente era la conclusión a la que se quería llegar.

La importancia de este problema no reside en su nivel de dificultad, sino en el hecho de que el estudiante debe comprender el concepto de bisector para poder resolver la situación, como se observa en la figura.

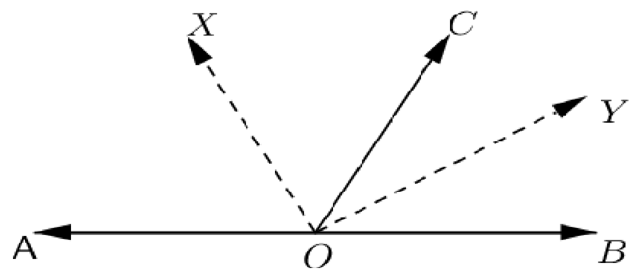


Fig. 9

Dado que es la clave para luego desarrollar las manipulaciones algebraicas necesarias, tratar los ángulos como cantidades, y una pequeña factorización en medio del problema, lo que sugiere un dominio de los métodos algebraicos por parte del estudiante, y el diseño de la actividad por parte del docente.

Este ejemplo nos abre camino hacia el análisis de la interpretación, la generalización y su relación con las pruebas y en especial las conjeturas. Veremos esto a través de la adaptación de un problema propuesto por Pedemonte (Pedemonte, 2007; Pág.30).

ABC es un triangulo arbitrario en el cual se construyen tres cuadrados exteriores sobre los lados. Si se conectan los puntos libres de los cuadrados, se definen tres triángulos más. Compare las áreas de los triángulos así formados con el área del triángulo *ABC*.

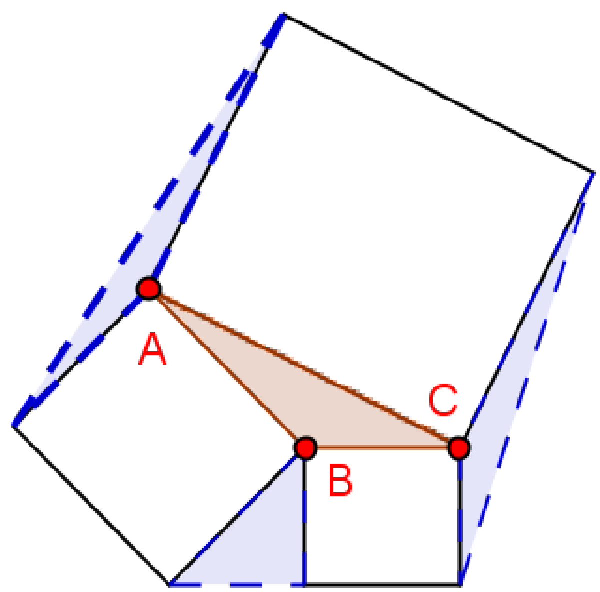


Fig. 10

La solución a este problema, que es presentado como una conjetura geométrica, encaja con las ideas del método adaptado de Lakatos para el uso de la demostración en el aula como herramienta didáctica.

El estudiante no tiene certeza de cuál podría ser la relación entre estos triángulos; es claro que el estudiante debe hallar una estrategia para encontrar dicha relación, por lo cual debe ocuparse de los datos que le brinda el problema, y de cómo conectarlos para establecer cuál es la justificación de dicha relación entre las áreas de los triángulos.

Es necesario entonces establecer una hipótesis, en este caso, conjeturar cuál puede ser la relación que se busca, en tanto que ello permitiría hallar una justificación para el uso de los datos y las reglas de inferencia, desde donde pueda dar una prueba deductiva o formal.

Podemos ahora reformular el problema desde una pregunta un poco más simple, para que el estudiante sea capaz de acercarse a descubrir las hipótesis, conceptos y relaciones fundamentales en el problema.

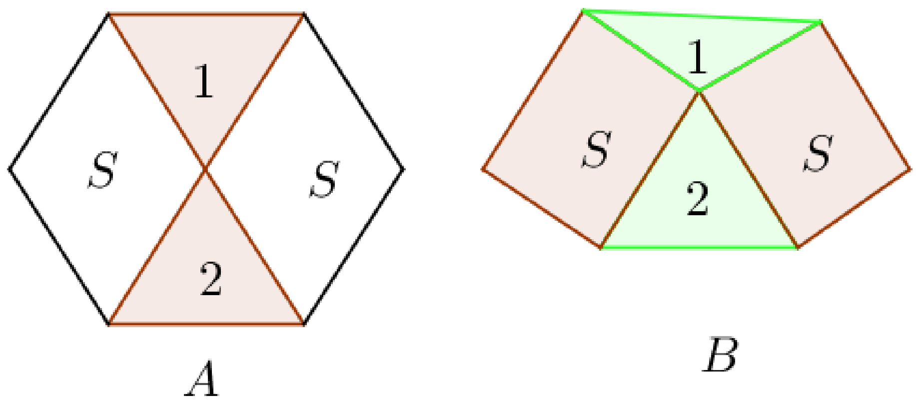


Fig. 11

¿En cuál de las dos situaciones *A* o *B,* las áreas de los triángulos 1 y 2 son iguales? ¿En la A o en la B o en las dos? El primer hecho relevante en el análisis del estudiante debe permitir observar la relación entre los lados del triángulo *ABC* y los demás triángulos. En efecto, el problema radica en observar que existe una relación de congruencia entre la base y la altura del triángulo *ABC* y la de los demás triángulos, lo cual implica una congruencia entre las áreas de los triángulos, y esto puede llevar consecuentemente a conjeturar que las áreas de los triángulos son iguales.

El problema se replantea ahora como la búsqueda una argumentación consistente que justifique esta conjetura. Es claro que en al caso de la Fig. 11, el triángulo es rectángulo, y se observa inicialmente como se puede inferir que los triángulos pueden tener la misma área. Por ejemplo, el triángulo ΔJFA tiene la misma área que el triángulo ΔABC; ello no implica que esta relación no se halle en cualquier otro tipo de triángulos.

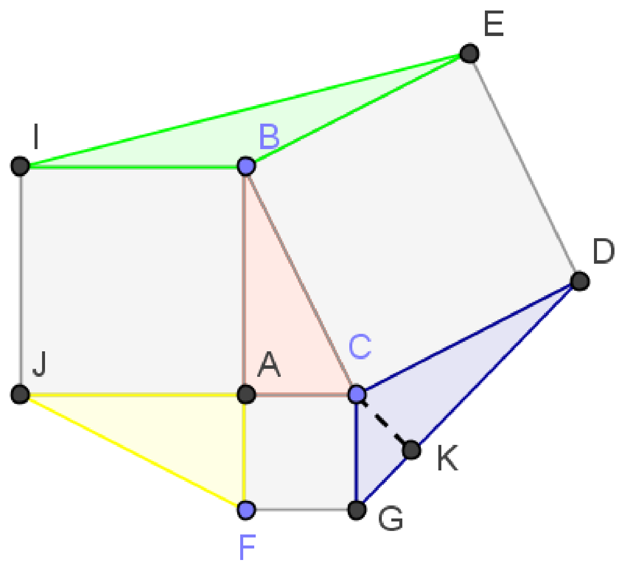


Fig.12

Es necesario que el estudiante encuentre una relación entre las bases y las alturas que mantenga constante las áreas; en realidad, como las bases son congruentes, dado que son lados del mismo cuadrado, entonces las alturas deben ser congruentes también par que puedan mantener el área constante.

De forma más general lo muestra la Fig. 13, dado que se construyen triángulos con las respectivas alturas y se toma un triangulo que no es rectángulo; en este sentido se habla ahora de una prueba deductiva, o formal para este problema, aunque podemos seguir explorando en triángulos escalenos por ejemplo, como se muestra en la figura 13.

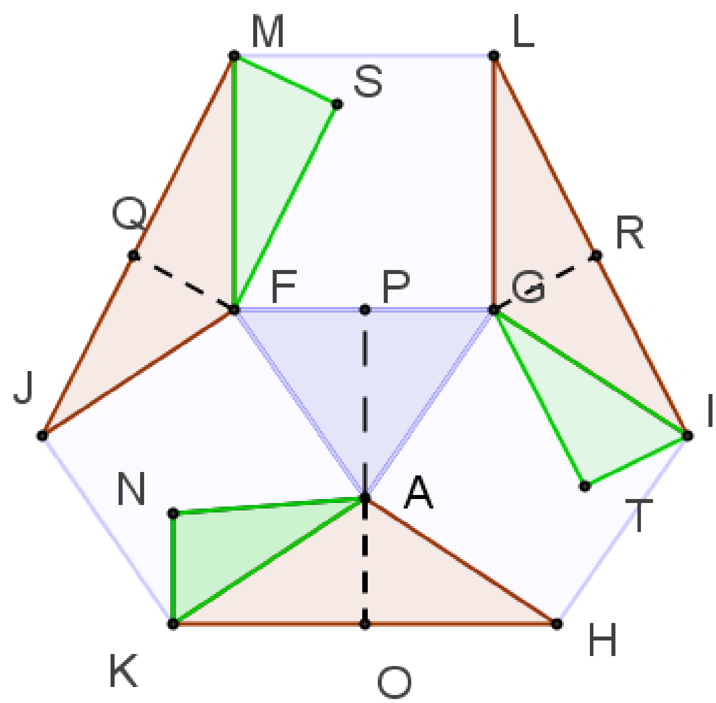


Fig. 13

Finalmente podemos ver el problema desde un punto de vista de un triangulo arbitrario, como se muestra en la figura 14. Una vez se logra probar que los dos triángulos ANC y ECD tienen altura congruente, entonces se puede analizar una estrategia general para la prueba deductiva; de acuerdo a lo anterior, tenemos además que el lado EC es igual al Lado AC, ya que son lados del mismo cuadrado; los ángulos EDC y ANC son rectos. Por criterio LAA tenemos que los triángulos ABC y ELC son congruentes y tienen la misma área.

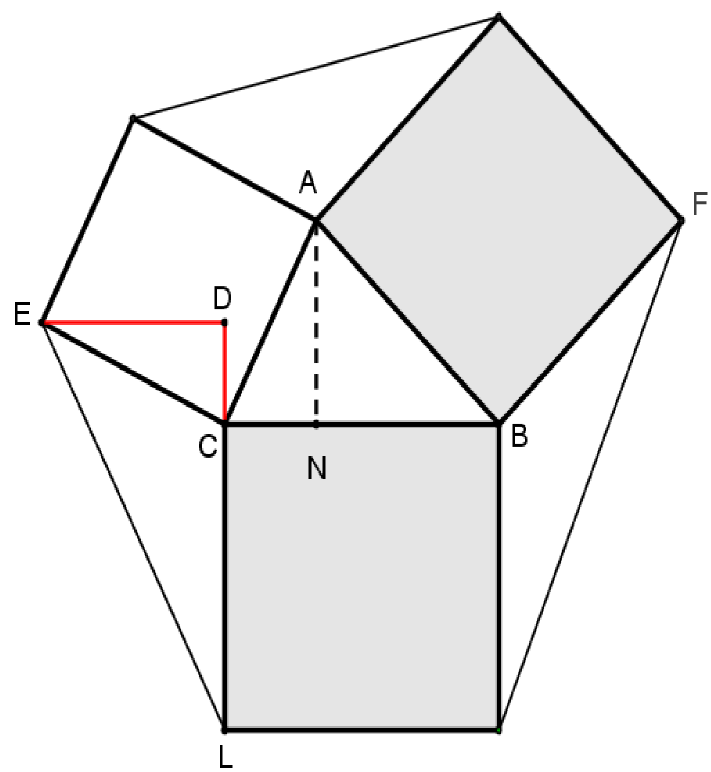


Fig. 14

Consideremos ahora en la figura 15, el triangulo ALC construido sobre la altura LC del triangulo ABC. Observemos que los triángulos ALC e ICM son congruentes; en efecto, el lado AC es congruente con IC dado que son lados del mismo cuadrado. Los ángulos ALC e IMC son congruentes, ya que son ángulos rectos. Además vemos que los ángulos ACL e ICM son congruentes debido a que son ángulos complementarios de ángulos rectos. En particular, podemos ver que el lado IM es congruente con el lado AL, de acuerdo al criterio LAA; de esta forma concluimos que los triángulos ABC e IDC son congruentes, porque tienen la misma base (lados del mismo cuadrado) y la misma altura, por lo tanto los triángulos son congruentes y tienen la misma área. Análogamente se procede para el otro triángulo y se completa la prueba.

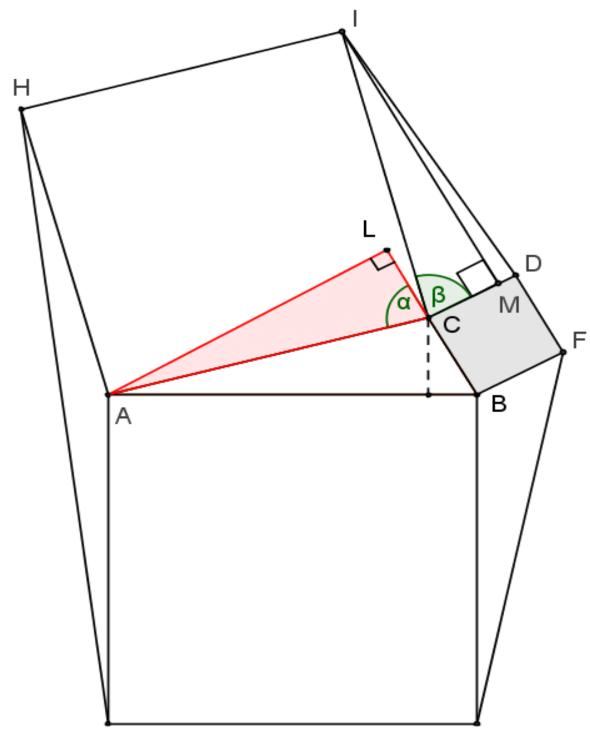


Fig. 15

Es claro que también podemos hallar una conjetura similar sobre las áreas de los triángulos a partir de algunas formulas trigonométricas, en cuyo caso, aunque la teoría matemática utilizada para resolver el problema sea diferente, se llega a la misma conclusión. Este hecho, en general, es uno de los objetivos de la formulación de este tipo de problemas, este hecho en general lo que se espera de los estudiantes es que exploren las posibilidades y las diferentes formas de argumentar respecto a una pregunta abierta o conjetura, lo cual estimula mucho más su imaginación y los motiva a hallar una respuesta a través de un argumento deductivo.

Otro de los elementos particulares que surgen a partir de exponer a los estudiantes a este tipo de tareas ha sido denominado por Styliniades como el *empirícismo ingenuo* (Styliniades, 2009; Pág. 9), el que consiste básicamente en la creencia que tienen los estudiantes de que al conseguir suficiente evidencia que sustenta una proposición, ello necesariamente implica una prueba que dicha proposición se cumple en general, sin aportar una demostración formal, en el sentido de la generalización. La relación entre abstracción, generalización y formalización es esencial en el aprendizaje de un concepto dado que encierra, por un lado, el proceso general de construcción del conocimiento matemático y por otro lado, nos muestra una vía para aprovechar este proceso, en la enseñanza de nuevos conceptos matemáticos a través del seguimiento histórico de las ideas que generaron este concepto, usualmente mediante el estudio de una serie de problemas particulares que llevan a una solución general.

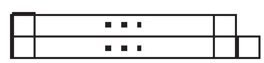
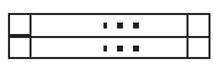
La formalización incluye la abstracción de las propiedades específicas aplicables no solo a los objetos de los cuales fueron abstraídos, sino que se cumplen para cualquier otro objeto que cumpla estas propiedades.

Esto se puede observar mediante el siguiente teorema muy conocido:
Teorema: La suma de dos números impares es siempre un número par.
En efecto, el estudiante en general en su primer ataque al problema, al buscar una estrategia para probar esta afirmación, empieza por buscar ejemplos particulares para sustentar la afirmación, por ejemplo, $25+33=58$, $11+13=24$, $41+97=138$. El problema con este tipo de argumentación radica en que el estudiante aún no ha comprendido el hecho de que aunque se logre comprobar una gran cantidad de ejemplos en un subconjunto válido de todos los casos posibles, ello no excluye la existencia de un posible contraejemplo para la afirmación.

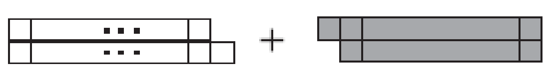
Una perspectiva didáctica para identificar una estrategia argumentativa general puede partir del lenguaje, en el sentido de explicarse a los estudiantes cuál es la naturaleza del objeto matemático: qué es un número impar y un número par; ello quiere decir que se debe hacer explícita la característica de los números pares y la de los impares; podemos considerar un número como un conjunto, y el número asociado al conjunto es la cantidad de elementos. Un número impar se puede ver, desde esta idea, como aquellos números tales que, al ser agrupados por parejas sus elementos, siempre sobra un elemento, a diferencia de los números pares, en los que la agrupación por parejas no arroja un elemento sobrante. Por lo tanto, si se agrupan dos números impares entonces los elementos sobrantes de cada uno siempre van a formar una pareja más, dando como resultado un conjunto al cual no le sobran elementos al ser agrupados por parejas; es decir, se obtiene un número par.

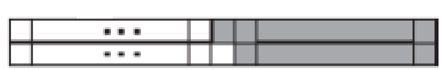
Es claro que este tipo de argumentación no constituye una prueba formal; sin embargo, arroja mucha luz sobre los objetos matemáticos que están relacionados en el problema.

Otro enfoque didáctico que ilustra también una manera de interpretar la relación antes establecida, es una aproximación de carácter gráfico al problema, que también se basa en la propiedad característica de los números impares y pares.

Los números impares son de la forma  , los números pares son de la forma  , luego la suma de números impares tendría la forma

Impar + Impar

 Nos da

 , un número par.

Es claro además que este argumento gráfico tampoco es una prueba formal, sin embargo, puede aclarar un poco más la idea planteada en el argumento inicial. La importancia de este tipo de razonamiento radica en que arroja luces a los estudiantes que necesitan una experiencia visual para interpretar algunas relaciones matemáticas.

Finalmente podemos ahora dar paso al uso del álgebra, con lo cual formulamos una prueba más formal y generalizada:

Demostración. Un número impar es de la forma $2k+1$, donde k es un número entero. Además los números pares son de la forma $2j$, donde j es un número entero. La suma de dos números impares tendría la forma: $(2k+1)+(2m+1)=(2k+2m)+1+1$, da como resultado un número $2(k+m+1)$ que es de la forma $2n$; es decir, es un número par.

Si observamos las diferentes formas en que se sustenta el argumento descrito para demostrar la proposición propuesta, todos los argumentos tienen la misma idea aunque se representan de manera distinta, por lo cual ayudan a entender el argumento a diferentes tipos de estudiantes, y proveen ideas para convencer a los estudiantes de la validez del teorema. Es por esta razón que Styliniades afirma que el potencial de una prueba para promover el *entendimiento* y el *convencimiento* es una de las principales razones por las cuales es importante para los estudiantes el aprendizaje de las matemáticas. (Styliniades, 2009; Pág. 10).

Conclusiones

Hemos establecido, desde diferentes visiones de la enseñanza de las matemáticas, la idea de la importancia del uso de las demostraciones y teoremas como herramienta pedagógica para el aprendizaje de los conceptos matemáticos y, en especial, para hacer explícita la naturaleza particular del estudio de los conceptos matemáticos, en tanto dicha naturaleza se comprende en la medida que los teoremas y sus demostraciones, en especial estas últimas, arrojen las propiedades fundamentales de estos conceptos y a partir de ello el estudiante pueda establecer las relaciones entre los diferentes conceptos y comprender mejor las teorías matemáticas que se le pretenden enseñar.

El diseño de las tareas que impulsan el desarrollo de las demostraciones en el aula de clase también enfrenta a los estudiantes con las dificultades que tienen para aprender matemáticas en todos los sentidos, es decir, el desarrollo de las actividades generales para la comprensión de los conceptos matemáticos se ve afectado por estas dificultades, y el trabajo didáctico con los problemas o tareas que involucran demostraciones permiten no solo descubrir dichas dificultades de aprendizaje sino que además establecen criterios generales para superar estos problemas.

Al exponer a los estudiantes a los métodos generales de demostración y argumentación en matemáticas a través de tareas didácticas, se les puede ayudar a entender mejor, por un lado, el valor de la argumentación y la prueba formal de las proposiciones, no solo en matemáticas sino a nivel de la ciencia en general; por otro lado, se puede abrir una ventana para que los estudiantes exploren y creen ideas nuevas a través de la argumentación de sus diferentes perspectivas sobre la resolución de los problemas, justifiquen y conozcan su propio pensamiento y cómo se valida el conocimiento científico.

El ejercicio propuesto intenta identificar las suposiciones, tratamientos y sobre todo, las disposiciones generales de los procesos que permiten a los estudiantes hallar las relaciones implícitas en el diseño, argumentación y desarrollo de los diferentes métodos de demostración, a través del uso y análisis de las situaciones didácticas planteadas.

En este sentido, la principal característica que tienen este tipo de situaciones didácticas radica en el conocimiento profundo por parte del docente de las estrategias y métodos generales de argumentación, para poder establecer, en primer lugar, qué propósitos tienen las elecciones particulares en la preparación de las actividades elegidas; esto es, qué trabajo hace el docente para convertir una proposición en un ejercicio cuya tarea fundamental sea la construcción de una prueba.

De acuerdo a lo anterior, si el propósito de la actividad es realizar una prueba o idear una estrategia de argumentación con los estudiantes, de tal forma que valoren la demostración como una forma de dar respuesta a una pregunta, es clave establecer cuál es el papel del docente y del estudiante durante la actividad, definir roles bien claros en que el estudiante tenga a su cargo una serie de actividades o tareas especificas, para trabajar todos juntos, por grupos o de forma individual.

Es importante tener en cuenta que los estudiantes expuestos a los cursos de matemáticas en la secundaria no lo hacen de manera voluntaria sino que hace parte del currículo general, y por lo tanto, las motivaciones para su estudio son muy variadas, incluyendo desde el reconocimiento de la importancia de aprender matemáticas hasta carecer completamente de motivación para estudiar matemáticas, a diferencia de un estudiante de nivel universitario, quien dado que es fundamental para su elección de carrera, asume las motivaciones y la actitud de trabajo y valoración del conocimiento matemático como elemento central del pensamiento científico. Todo esto sugiere que los factores sociales de aprendizaje de las matemáticas también deben incluirse en el análisis y escogencia de las diferentes tareas que se pretende utilizar en el aula.

El contenido matemático especifico de las actividades que se escogen para ser presentadas en el aula también es un factor importante a tener en cuenta mas allá de de las dificultades obvias de enfrentar a los estudiantes con problemas demasiado complejos. Es fundamental determinar el hecho de que los estudiantes en este momento de la historia, y sobre todo debido a los currículos actuales, están obligados a adquirir una gran cantidad de conceptos en tan poco tiempo que el aula de clases no es suficiente, lo cual implica una cantidad significativa de trabajo individual, sobre todo cuando los conceptos involucran procesos tan complejos como la abstracción, la formalización y generalización.

Desde el punto de vista del contenido, al estudiante se le exige que asimile conceptos de una forma rápida, sin tener en cuenta que la evolución histórica de estos ha sido una larga lucha en el desarrollo y aporte de grandes matemáticos basados en ideas y problemáticas muy distintas de lo que se quiere que el estudiante aprenda, ideas que no son accesibles al estudiante ni son de su interés particular y mucho menos cómo evolucionaron estas para dar paso a un concepto abstracto, general y formalizado, que no están a su nivel de análisis. Un ejemplo puede verse en el desarrollo del concepto de límite y cómo se pretende que los estudiantes en la secundaria aprendan el manejo de la definición a partir de la noción de $\varepsilon - \delta$.

El manejo entonces de la enseñanza de los conceptos matemáticos, a través de la demostración de teoremas, requiere de una gran imaginación y de métodos prácticos que recojan la esencia de estos para transformarlos en objetos de aprendizaje, más no necesariamente para la manipulación y uso en teorías matemáticas complejas, como se ha pretendido desde la perspectiva de los matemáticos profesionales. El objetivo es buscar alternativas que les permitan a los estudiantes de niveles básicos y secundarios la construcción de los conceptos complejos a partir del análisis de las propiedades de los objetos matemáticos, mediante el desarrollo de la habilidad de solución de problemas y el énfasis en las demostraciones.

Por lo dicho anteriormente, la perspectiva docente es la de un asesor; es decir, dado que el propósito de la enseñanza de las matemáticas es la comprensión de conceptos abstractos, las matemáticas tienen un objetivo posterior que es aprehender la estructura del pensamiento científico en toda su variedad, en tanto que es claro que todos los estudiantes en este nivel no van a seguir la carrera de matemáticas a nivel profesional, es innegable que es de gran ayuda en todas las demás actividades profesionales.

En general, podríamos establecer más criterios que justifiquen la enseñanza de las demostraciones y los beneficios de ello para los estudiantes de niveles básicos y secundarios; sin embargo, la meta es establecer un punto de partida para construir la propuesta didáctica con características de los problemas discutidos en el capítulo anterior.

Una primera característica es la creación de de un clima de discusión y de debate entre los estudiantes y el docente; esto crea un compromiso previo con el estudio de las matemáticas por parte de los estudiantes; el uso de los problemas que permitan la formación de los conceptos que se quieren enseñar, a través de estrategias de demostración que permitan dar indicaciones de verdad sobre una proposición o el problema planteado, como el estudio de contextos históricos de las ideas en matemáticas, asegurando una reflexión matemática que cree un ambiente para el uso de los conceptos matemáticos.

Para esbozar de forma general la propuesta debemos tener en cuenta los siguientes criterios que nos acercan al uso de las demostraciones como herramienta didáctica.

- La formulación de las diferentes tareas que nos acercan a ese objetivo esencial de producir una prueba o demostración de un problema en el aula de clases es un proceso también complejo, pero se basa en las elecciones que hace el docente sobre unos elementos claves que se declaran como objetivos para el diseño de las actividades.
- La construcción de la actividad debe declarar un propósito específico, que debe presentarse de antemano a los estudiantes, vale decir investigar cómo a través de la solución de la actividad, se puede llevar a cabo la construcción de un argumento tipo prueba.
- Se debe tener en cuenta qué se va a probar, una proposición o problema que se plantea de manera explícita, a partir de la cual se puede determinar la validez de una conjetura que plantee el docente o que plantean los estudiantes.
- Identificar la forma en la cual se declara la proposición o tarea, el tipo de premisas y conclusiones que se tienen como dados y la búsqueda de un esquema de razonamiento válido para establecer las relaciones entre lo dado y lo que se pretende probar, que se halle la pregunta fundamental que debe responderse.
- Es esencial advertir la relación de los conceptos que se se involucran, ya sea de manera explícita o implícita, en la resolución y análisis de la actividad planteada y, sobre todo, la búsqueda de los elementos más convenientes para el diseño, por parte de los estudiantes, de las mejores estrategias de argumentación de acuerdo a los diferentes tipos de

demostración, desde el punto de vista lógico; es decir, utilizar una demostración directa, indirecta, deductiva, inductiva, por casos.

- Se deben tener en cuenta las diferentes tipos de representaciones en que se presentan las actividades: en lenguaje coloquial, algebraico, gráfico, diagramas. O, si se sugiere la construcción de un diagrama u otro tipo de representación para estudiar el problema, cómo se asignan los símbolos, las letras y otras representaciones.
- Es oportuno que las actividades impulsen el debate, el trabajo colectivo o individual de los estudiantes, separando las actividades de estos y guiando su trabajo de manera que se pueda lograr el objetivo, sin dejarles toda la carga de trabajo.
- Reconocer que la actividad está diseñada de tal forma que el estudiante debe construir sus propias ideas sobre la resolución del problema; que, además, debe ordenar esas ideas de forma lógica en cualquiera de las perspectivas que hemos analizado, pero que en general se hace manera deductiva, de tal forma que, aunque no se llegue a la demostración formal, el estudiante en su valoración está aprendiendo el proceso de demostración de carácter lógico deductivo propio de las matemáticas. Esto implica que se debe tener cuidado en la asesoría y la valoración de los resultados tanto grupales como individuales de los estudiantes.
- Debo reconocer finalmente que no se debe cerrar la puerta a la creatividad y que es fundamental escuchar las preguntas de los estudiantes en el aula, dado que no existe ningún principio que le diga a un docente o estudiante cómo hacer una pregunta válida o interesante. En este sentido, la discusión en el aula aporta elementos explicativos claves que es posible que las propias demostraciones no aclaren. Recordemos que a nivel científico a veces es más importante hallar la pregunta adecuada que la misma respuesta que se busca.
- Es imperativo saber por parte del decente, qué se puede hacer con los desempeños de los estudiantes que tuvieron dificultades en el desarrollo

de las actividades. Esta valoración es clave para poder mejorar el desempeño de estos, dado que las dificultades pueden variar de diferentes formas: fallas en el razonamiento lógico, en establecer adecuadamente las relaciones entre los conceptos y premisas involucradas, en la interpretación de la actividad que se planteó, entre otras.

Finalmente, es necesario reconocer que esta propuesta aun no se ha probado en el aula de clases, por lo cual sugiero una posible investigación futura dedicada al diseño de las actividades, conjeturas y problemas que permitan su puesta a prueba en las aulas de clase; por un lado, nos permite validar la propuesta didáctica y, por otro lado nos indicaría que elementos son favorables a la propuestas, la construcción de ambientes de aprendizaje para ello y posibilidades de encontrar nuevas perspectivas de uso de la propuesta no solo a nivel medio, sino en la básica primaria i incluso a nivel universitario.

Bibliografía

1. Acheson, D. (2010). *1089 and All That: A Journey into Mathematics*. Oxford: Oxford University Press.
2. Barbé, J. Bosch, M. Espinoza, L & GascónJ. (2005*); Didactic Restrictions On The Teacher's Practice: The Case Of Limits Of Functions In Spanish High Schools*; Educational Studies in Mathematics Vol 59; Pags. 235–268; Springer.
3. Barwise, J. & Etchemendy, J. (1999). *Language, Proof And logic*. London: Seven Bridges Press.
4. Boero P. et al. (2007). *Theorems in schools: From history, epistemology and cognition to classroom practice*. Rotterdam: Sense Publishers.
5. Chazan, D. (1993). *High School Geometry Students' Justification for Their Views of Empirical Evidence and Mathematical Proof*; Source: Educational Studies in Mathematics, Vol. 24, No. 4, Aspects of Proof (1993), Pág. 359-387 Published online by: Springer
6. Estándares Básicos de Competencias Ministerio de Educación Nacional
7. G. Hanna et al. (eds.).(2010). *Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives*. Springer Science+Business Media, LLC.

8. Harel. G. y Sowder. L. (2003). *Case Studies of Mathematics Majors' Proof Understanding, Production, and Appreciation*; en Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education; Págs 252-267.
9. Hoch, M. & Dreyfus, T. (2004*). Structure sense in high school algebra: The effect of brackets.* En M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.), Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol 3 (pp 49-56). Bergen, Norway: Bergen University College.
10. Houston, K. (2009). *How to Think Like a Mathematician:* Cambridge University Press. Cambridge.
11. Kospentaris,G & Spyrou, P. & Lappas, D. (2011); *Exploring students' strategies in area conservation geometrical tasks*; Published online: Springer Science+Business Media B.V.
12. Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations*. Cambridge: Cambridge University Press.
13. Lakatos, I. (1978). *La Metodología de los Programas de Investigación Científica.* Madrid: Alianza Editorial.
14. Lakatos, I. (1978b). *Mathematics, science and epistemology.*Cambridge: Cambridge University Press.
15. Legris, J. (2012).*Nota sobre el concepto de demostración en C. S. Peirce.* En revista Notae Philosophicae Scientiae Formalis; Vol 1. Nro. 2; 2012 Pág. 124-134.
16. Lester, F.K. (1975); *Developmental Aspects of Children's Ability to Understand Mathematical Proof*; Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 6, No. 1 (Jan., 1975), Pág. 14-25 Published by: National Council of Teachers of Mathematics.
17. Pastor, J.A. y Bosch, C. (2001). *La peor conjetura de Fermat sigue abierta.* En Revista Miscelánea Matemática Nro. 34 Pág. 113-123.
18. Pedemonte, B. (2007). *How can the relationship between argumentation and proof be anlysed?*; Published online: by Springer Science+Business Media B.V.

19. R. Rubinstein, T.& Craine, T. (1995) *Integrated Mathematics 2*. New York Macdougal Littel.
20. Radford, L. (2008). *Diagrammatic thinking: Notes on Peirce's semiotics and epistemology.* PNA, 3(1), 1-18
21. Styliniades, A. (2009). *Breaking the Equation.* en Mathematics Teaching, Association of Teachers of Mathematics USA.; Pág. 9-14.
22. Weiss, M. & Herbst, P. & Chen, C. (2008). *Teachers' perspectives on "authentic mathematics" and the two-column proof form*; Published online: Springer Science + Business Media B.V.
23. Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S. & Seo, D. Y. (Eds.). *Certainty, Explanation And Creativity In Mathematics*. Seoul: Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 1, Pág. 17-44.